This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Library
of the
University of Wisconsin

Labile und stabile

Gleichgewichtsfiguren

vollkommen elastischer

auf Biegung beanspruchter Stäbe

mit besonderer Berücksichtigung

der

Knickvorgänge.

Habilitationsschrift

der Grossherzoglichen Technischen Hochschule Karlsruhe

zur Erlangung der

Venia legendi für das Lehrfach der Technischen Mechanik

vorgelegt von

Carl J. Kriemler, Lic. Math.

Ingenieur.

Mit 10 Figurentafeln.

Karlsruhe.

Druck der G. Braun'schen Hofbuchdruckerei.

1902.

LITTERATUR.

Appell-Lacour: »Principes de la théorie des Fonctions elliptiques et Applications.« (Paris, Gauthier-Villars.)

Engesser: »Die Knickfestigkeit gerader Stäbe.« (Berlin, Wilhelm Ernst und Sohn.)

Euler: »Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes. Additamentum I. De curvis elasticis.« (Lausanne und Genf 1744.)

Grashof: »Theorie der Elasticität und Festigkeit.« (Berlin, Rudolph Gaertner.)

Greenhill: »Graphical representation of the elliptic functions by means of a bent elastic beam.« Messenger of Mathematics. Vol. V. (1876) pag. 180.

Saalschütz: »Der belastete Stab unter Einwirkung einer seitlichen Kraft.« Auf Grundlage des strengen Ausdruckes für den Krümmungsradius. (Leipzig, B. G. Teubner.)

Kriemler: »Beitrag zur Theorie der Knickung.« Centralblatt der Bauverwaltung 1901 No. 38.

125282
DEC - 8 1900
SDH
.K89

6117459

VORWORT.

Vorliegende Arbeit beansprucht nicht, vom mathematischen Standpunkte aus Neues zu bieten, wohl aber für den Techniker wertvolle Folgerungen aus schon vorhandenen mathematischen Resultaten abzuleiten. Der zu diesen Folgerungen führende Weg bestand in der Hauptsache in der Bestimmung der Integrationskonstanten, deren Bestimmung die allgemeinen Lösungen erst auf diejenige Form brachte, aus welcher sich ein klares Bild von den einzelnen Vorgängen ergeben konnte.

Alle Untersuchungen beziehen sich auf Stäbe konstanten Querschnittes aus einem Materiale mit folgenden ideellen Eigenschaften:

1. es sei vollkommen homogen;
2. es habe eine unbegrenzte Festigkeit;
3. für jede Grösse der Spannung sei das Verhältnis von Spannung zur Dehnung oder Pressung gleich dem Festwert (Elastizitätsmodul) E.

Die erste dieser Voraussetzungen ist notwendig, weil es ganz unmöglich ist, in geschlossenen Formeln Zufälligkeiten in der Beschaffenheit des Materials zum Ausdruck zu bringen.

Die zweite Voraussetzung ist gemacht worden, weil die Deformationsvorgänge erkannt werden sollen, nicht aber die Zerstörungsvorgänge; es würde das Bild jener getrübt werden, wenn Bedingungsgleichungen mitgeführt werden müssten, durch welche jeweils der Übergang der Deformation in den Zerfall festgelegt würde. Sehr schön wäre es allerdings, wenn für die Grössen, durch welche die Deformation gemessen wird, Formeln aufgestellt werden könnten, welche den Eintritt des Zerfalles etwa dadurch kennzeichneten, dass diese Formeln für die Deformationsgrössen imaginäre Werte ergäben.

Durch die dritte Voraussetzung werden die gefundenen Resultate in ihrer Gültigkeit beschränkt auf solche Materialien, bei welchen die Zug- und Druckspannung σ und die Dehnung ε dem linearen Gesetz Hooke's $\frac{\sigma}{\varepsilon} = E$ genügen, wo E denselben Wert hat für Zug und Druck.

Ausgeschlossen sind also diejenigen Materialien, welche z. B. dem Schüle-Bach'schen Gesetz $\frac{\sigma^m}{\varepsilon} = E_1$ unterworfen sind, wo $m \gtrless 1$ ist.

Im Grossen und Ganzen ist das lineare Gesetz $\frac{\sigma}{\varepsilon} = E$ nur bei Walzeisen, Stahl und auch Holz erfüllt, und zwar auch bei diesen nur innerhalb der sogenannten Elastizitätsgrenze. Es ist aber im Mittel die Spannung an der Elastizitätsgrenze

beim Schweisseisen . . . $\sigma_\varepsilon = 1600$ kg/cm²,
» Flusseisen . . . . . $\sigma_\varepsilon = 1900$ bis 2000 kg/cm²,
» Stahl . . . . . $\sigma_\varepsilon = 3000$ bis 4500 kg/cm²,
» Holz . . . . . $\sigma_\varepsilon = 100$ kg/cm².

Die im Folgenden gefundenen Resultate dürfen in praxi also auf Stäbe aus Walzeisen, Stahl und Holz angewendet werden, so lange als die der gefundenen Deformation entsprechende maximale Spannung höchstens gleich σ_E wird. Da nun bei einer gleichen Grösse der Deformation ein schwacher Stab weniger beansprucht ist als ein starker Stab, so sind die gefundenen Resultate, vorausgesetzt, dass keine unendlichen Stablängen verlangt sind, auch in praxi zu verwirklichen, wenn bei wachsender Deformation Stäbe von abnehmendem Trägheitsmoment benützt werden. Viele der Resultate werden sich also niemals auf einen Balken beziehen können, wohl aber z. B. auf bandförmige Federn.

Es wird unter anderem gezeigt werden:

1. dass ein vollkommen elastischer, gewichtsloser, ursprünglich gerader, an dem einen Ende eingespannter, an dem anderen Ende freier Stab von der Länge l und dem Trägheitsmomente $\mathcal{J}$, auf den am freien Ende eine zur Richtung der Einspannung normale Last P wirkt, nur eine Gleichgewichtsfigur hat, so lange die Lastgrösse der Bedingung genügt $P < 1{,}393210 \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$;

2. dass derselbe Stab, wenn die Last P parallel zur Einspannungsrichtung wirkt, nur eine Gleichgewichtsfigur hat, so lange die Lastgrösse der Bedingung genügt $P <= 0{,}25 \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$.

Wenn in dem ersten Falle $P => 1{,}393210 \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$ und in dem zweiten Falle $P > 0{,}25 \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$ ist, wird gezeigt werden, dass es — abgesehen von eventuell möglichen anderen Gleichgewichtsfiguren — drei Gleichgewichtsfiguren derart giebt, dass der Stab bei der kleinsten Störung aus der mittleren labilen in eine oder die andere stabile Gleichgewichtsfigur umfällt. Bei dem Stabe, dessen Belastung parallel der Einspannung ist, ist dieses Umfallen als »Knickung« bekannt.

Dem Wesen nach ist also die Knickung nicht eine ausschliessliche Eigentümlichkeit des axial belasteten Stabes; sie kommt aber beim axial belasteten Stab deshalb häufiger zum Vorschein, weil bei demselben die natürliche Gleichgewichtsfigur die labile ist, während beim quer belasteten Stabe die labile Gleichgewichtsfigur erst durch eine vorübergehende künstliche Nachhülfe eingestellt werden kann, die natürliche Gleichgewichtsfigur aber die eine der stabilen ist.

In dem dritten und letzten Abschnitt wird endlich gezeigt werden, dass die sogenannte Knickkraft des axial belasteten Stabes bei Berücksichtigung aller drei deformierenden Einflüsse, nämlich des Momentes, der Normalkraft und der Querkraft, die Grösse hat

$$P = 0{,}25 \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{P}{F}\left(\frac{1}{\beta G} - \frac{1}{E}\right)},$$

worin β ein von der Querschnittsgestalt abhängiger Koeffizient ist. Es ist also bei genauerer Rechnung die Knickkraft abhängig von dem Trägheitsmoment $\mathcal{J}$, von der Querschnittsgrösse F, von der Querschnittsgestalt, von der Elastizitätsziffer E und von der Schubelastizitätsziffer G.

Während im ersten und zweiten Abschnitte die Ableitungen mathematisch vollständig genau durchgeführt werden konnten, musste im dritten Abschnitte zur Ermöglichung eines Einblickes in die Vorgänge Schritt für Schritt minder Einflussreiches vernachlässigt werden.

Die Figuren geben die dargestellten Curven genau wieder mit Ausnahme der Figuren 1 a, 3 bis 8, 28, 35, 48 bis 54, welche nur schematisch sind.

Einleitung.

Wird ein Stab von äusseren Kräften beansprucht, welche seine Axe schneiden, so ergiebt die Reduktion der auf der einen Seite eines Querschnittes an dem Stabe angreifenden Kräfte z. B. nach dem Schwerpunkte dieses Querschnittes im allgemeinsten Falle 1. ein Moment, 2. eine zum Querschnitt normale Kraft, 3. eine in der Querschnittsebene liegende Kraft. Je nach der Art der Belastung können eine oder zwei dieser drei Reduktionselemente für einzelne oder für alle Querschnitte verschwinden oder von so geringem Einflusse sein, dass sie vernachlässigt werden können. Im Folgenden soll vorerst der Einfluss der zum Querschnitt normalen Kraft d. h. der Normalkraft und der in der Querschnittsebene liegenden Kraft d. h. der Querkraft ausser Berücksichtigung bleiben, es wird also die Annahme gemacht, dass in allen Querschnitten nur Momente wirken. Unter diesen Umständen besteht die Deformation des Stabes in einer reinen Verbiegung.

Ausführlich untersucht werden sollen folgende als reine Biegung aufgefasste Deformations- bezw. Belastungsfälle.

Das eine Ende eines im natürlichen d. h. spannungslosen Zustande geraden gewichtslosen Stabes, dessen Querschnitte gleich und gleich gelegen sind, ist eingespannt, das andere Ende ist frei. Dieser Stab wird künstlich so gekrümmt, dass seine Axe eine noch unbekannte Kurve (ohne Spitzen) in derjenigen Ebene bildet, welche die eine der Hauptträgheitsaxen der aufeinanderfolgenden Querschnitte enthält. In diesem deformierten Zustande soll nun der Stab dadurch erhalten werden, dass in der Ebene der gekrümmten Axe im Schwerpunkte des Stirnquerschnittes am freien Ende eine Einzelkraft angebracht wird, welche das eine Mal zur Richtung der Einspannung rechtwinkelig, das andere Mal der Richtung der Einspannung parallel ist. Die deformierte Stabaxe wird die elastische Linie des Stabes genannt. Die elastische Linie, die eine Hauptträgheitsaxe der aufeinanderfolgenden Querschnitte und die Kraft, welche die elastische Linie erhalten soll, liegen also in einer Ebene, welche somit, wie in den Figuren 1 und 2 geschehen, als Ebene der zeichnerischen Darstellung Verwendung finden kann.

Erster Fall.

Der ursprünglich gerade gewichtslose Stab wird in der Krümmung erhalten durch eine im Schwerpunkt des freien Stirnquerschnittes angreifende Einzelkraft P, welche zur Richtung der Einspannung rechtwinkelig ist.

I. Teil.

Da der Stab unter Einwirkung der Kraft P in der Krümmung verbleibt, so sind in jedem Querschnitte die auf dessen Schwerpunkt reduzierten inneren Kräfte im Gleichgewicht mit den eben dorthin reduzierten auf der einen Seite vom Querschnitt am Stab angreifenden Kräften. Von den Reduktionselementen sollen nur die Momente Berücksichtigung finden, also ist $M_i = M_a$ allein zu erfüllen. Ist ferner $\mathcal{J}$ das Trägheitsmoment des Stabquerschnittes bezogen auf die zur Ebene der

elastischen Linie rechtwinkelige Hauptträgheitsaxe, und ist ϱ der Krümmungsradius der elastischen Linie an der Stelle, wo sie den betrachteten Querschnitt kreuzt, so ist (Grashof, pag. 59 Gl. 81) $\frac{1}{\varrho} = \frac{M_i}{EJ}$, woraus, da $M_i = M_{\ddot{a}}$ ist, folgt, dass in jedem Querschnitt $\frac{1}{\varrho} = \frac{M_{\ddot{a}}}{EJ}$ ist.

Bemerkung. Die Unterscheidung zwischen M_i und $M_{\ddot{a}}$ ist nötig, weil nur beim Gleichgewicht beide denselben Wert haben; würde der Stab unter der Wirkung der Kraft P aus dem geraden in den gebogenen Zustand übergehen, so wäre während der Deformation in jedem Augenblicke $M_i = M_{\ddot{a}} + M_e$, wo M_e das auf den betreffenden Querschnitt bezogene Moment der auf der einen Seite vom Querschnitt angreifend zu denkenden d'Alembert'schen Ergänzungskräfte ist.

Wird die elastische Linie des in Behandlung stehenden Stabes auf ein rechtwinkeliges Koordinatensystem bezogen, dessen Ursprung die Einspannungsstelle, dessen x-Axe die Richtung der Einspannung und dessen y-Axe im Sinne des Pfeiles der Kraft P positiv ist, so hat man die Figur 3.

Es soll nun hier der Krümmungsradius ϱ positiv genommen werden, wenn der betreffende Stabteil so gekrümmt ist, dass diejenige äusserste Faser gedrückt ist, welche im ursprünglichen, geraden Stabe auf der Seite lag, nach welcher der Pfeil von P hinweist. Da aber ϱ das Vorzeichen von $M_{\ddot{a}}$ hat, so muss hier, wie aus der Figur 3 ersichtlich ist, $M_{\ddot{a}}$ als positiv definiert werden, wenn das auf einen Querschnitt bezogene Moment der zwischen Querschnitt und freiem Stabende angreifenden Kräfte den Sinn der Uhrzeigerbewegung hat.

Wird, wie in der Fig. 3 geschehen ist, die Abscisse des Lastangriffspunktes mit x_a bezeichnet, so ist das auf den Querschnitt, dessen Abscisse x ist, bezogene Moment $M_{\ddot{a}} = +P(x_a - x)$, also ist an dieser Stelle $\frac{1}{\varrho} = \frac{P}{EJ}(x_a - x)$. Zur Abkürzung soll $\frac{P}{EJ} = p^2$ gesetzt werden, so dass $\frac{1}{\varrho} = p^2(x_a - x)$ ist.

Es ist aber $\varrho \cdot d\varphi = ds$, wo ds das Element der Bogenlänge ist, positiv im Sinne der Bewegung entlang der elastischen Linie vom eingespannten Ende gegen das freie Ende zu, und $d\varphi$ der Elementarwinkel ist, den die Tangente an die elastische Linie im Endpunkte von ds bildet mit der Tangente im Anfangspunkte. Aus den Definitionen für positives ϱ und für positives ds folgt, dass $d\varphi$ positiv ist, wenn die Tangente im Anfangspunkt von ds in die Tangente im Endpunkt von ds durch eine Drehung im Sinne der Uhrzeigerbewegung übergeht. Wird also auf der elastischen Linie vom eingespannten Ende gegen das freie Ende hin fortgeschritten, d. h. wird ds immer positiv genommen, so haben ϱ und $d\varphi$ stets beide dasselbe Vorzeichen, d. h. bei positivem ϱ geht die Tangente in die nächstfolgende über durch eine Drehung im Sinne der Uhrzeigerbewegung, bei negativem ϱ geht sie in die nächstfolgende über durch eine Drehung, welche der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzt ist. Da nun $\frac{1}{\varrho} = \frac{d\varphi}{ds}$ ist, so ist die Differentialgleichung der elastischen Linie

$$\frac{d\varphi}{ds} = p^2(x_a - x).$$

Der Winkel φ ist derjenige Winkel, den die Tangente im Sinne der wachsenden s und im Sinne der Drehung von der positiven x-Axe nach der positiven y-Axe mit der x-Axe bildet, es ist aber für die formale Behandlung zweckmässig, nicht diesen Winkel zu benützen, sondern den Winkel ψ, welchen die Tangente im Sinne der wachsenden s und im Sinne der Drehung des Uhrzeigers von der x-Axe nach der positiven y-Axe mit der Richtung der y-Axe bildet.

Die Figur 4 giebt $\psi = \frac{\pi}{2} + \varphi$; $\varphi = \psi - \frac{\pi}{2}$; $d\varphi = d\psi$; $\cos\varphi = \sin\psi$; $\sin\varphi = -\cos\psi$; $\cos\psi = -\sin\varphi$; $\sin\psi = \cos\varphi$.

Mit dieser Substitution wird die Differentialgleichung zu

Gl. I) $$\frac{d\psi}{ds} = p^2(x_a - x).$$

Wird links und rechts nach ds differentiert, so hat man

$$\frac{d^2\psi}{ds^2} = -p^2\frac{dx}{ds}, \text{ aber es ist } \frac{dx}{ds} = \cos\varphi = \sin\psi, \text{ also ist } \frac{d^2\psi}{ds^2} = -p^2\sin\psi.$$

Wird links und rechts mit $d\psi$ multipliciert, wodurch $d\psi \frac{d^2\psi}{ds^2} = -p^2 \sin\psi\, d\psi$, und dann noch die linke Seite mit ds erweitert, so ist $\frac{d\psi}{ds} \frac{d^2\psi}{ds^2} ds = -p^2 \sin\psi\, d\psi$; es ist aber

$$d\left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 = 2 \frac{d\psi}{ds} \frac{d^2\psi}{ds^2} ds,$$

also hat man $\frac{1}{2} d\left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 = -p^2 \sin\psi\, d\psi$.

Die einmalige Integration dieser Gleichung giebt $\frac{1}{2}\left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 = +p^2 \cos\psi + C_1$.

Nun ist für $x = x_a$ nach Gleichung 1 $\frac{d\psi}{ds} = 0$, und in Figur 4 ist für $x = x_a$ der Winkel ψ mit γ bezeichnet, also ist $0 = p^2 \cos\gamma + C_1$; $C_1 = -p^2 \cdot \cos\gamma$. Es ist also $\frac{1}{2}\left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 = p^2(\cos\psi - \cos\gamma)$. Da aber $\cos\psi = 1 - 2\sin^2\frac{\psi}{2}$ und $\cos\gamma = 1 - 2\sin^2\frac{\gamma}{2}$ ist, so ist

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 = p^2\left(2\sin^2\frac{\gamma}{2} - 2\sin^2\frac{\psi}{2}\right); \quad \left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 = 4p^2\left(\sin^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\psi}{2}\right);$$

Gl. 2) $$\frac{d\psi}{ds} = 2p\sqrt{\sin^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\psi}{2}}.$$

Hieraus findet man durch Trennung der Variablen $2p\,ds = \frac{d\psi}{\sqrt{\sin^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\psi}{2}}}$.

Führt man nun die neue Variable ein $u = \frac{\sin\frac{\psi}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$, so ist $\sin\frac{\psi}{2} = u \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$, und da

$$du = \frac{\cos\frac{\psi}{2}\, d\frac{\psi}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{2}\frac{\cos\frac{\psi}{2}\, d\psi}{\sin\frac{\gamma}{2}} \text{ ist, so ist umgekehrt } d\psi = 2\,du \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\psi}{2}};$$

$$d\psi = 2\,du \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\psi}{2}}}; \quad d\psi = 2\,du \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{1 - u^2\sin^2\frac{\gamma}{2}}}.$$

Es ist also mit dieser Substitution

$$2pds = \frac{1}{\sqrt{\sin^2\frac{\gamma}{2}(1-u^2)}} \cdot \frac{2\,du \sin\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{1 - u^2\sin^2\frac{\gamma}{2}}}; \quad 2pds = \frac{2\,du}{\sqrt{(1-u^2)\left(1 - u^2\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)}}.$$

Zur Abkürzung soll jetzt $\sin\frac{\gamma}{2} = k$ gesetzt werden, so dass umgekehrt $\frac{\gamma}{2} = arc\sin k$; $\gamma = 2\,arc\sin k$ ist. Demnach ist $pds = \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$. Hieraus ergiebt sich durch Integration

$$p(s - s_c) = \int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

Die Grösse s_c ist eine noch unbekannte Konstante.

Die Inversion dieses Integrales giebt $u = sn[p(s - s_c)]$, und da $\sin\frac{\psi}{2} = k \cdot u$ ist, so ist

Gl. 3) $$\sin\frac{\psi}{2} = k \cdot sn[p(s - s_c)].$$

Da ferner $\cos\frac{\psi}{2} = \sqrt{1 - \sin^2\frac{\psi}{2}}$, so ist $\cos\frac{\psi}{2} = \sqrt{1 - k^2\, sn^2[p(s - s_c)]}$, also

Gl. 4) $$\cos\frac{\psi}{2} = dn\,[p\,(s - s_c)]\,.$$

Nach Gleichung 2 ist $\frac{d\psi}{ds} = 2p\sqrt{\sin^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\psi}{2}}$. Mit $\sin\frac{\gamma}{2} = k$ und mit $\sin\frac{\psi}{2} = k\,sn\,[p\,(s-s_c)]$ wird nun $\frac{d\psi}{ds} = 2pk\sqrt{1 - sn^2\,[p\,(s - s_c)]}$; $\frac{d\psi}{ds} = 2\,p\,k\,cn\,[p\,(s - s_c)]$. Nach Gleichung 1 ist aber $\frac{d\psi}{ds} = p^2\,(x_a - x)$, es ist also $p^2\,(x_a - x) = 2\,p\,k\,cn\,[p\,(s - s_c)]$ oder

Gl. 5) $$x_a - x = \frac{2\,k}{p}\,cn\,[p\,(s - s_c)],$$

worin x_a die Abscisse des Lastangriffspunktes ist.

Ferner ist allgemein $\frac{dy}{ds} = \sin\varphi$, hier also $\frac{dy}{ds} = -\cos\psi = -\left(1 - 2\sin^2\frac{\psi}{2}\right)$, oder wegen Gleichung 3 $\frac{dy}{ds} = -\{1 - 2\,k^2\,sn^2\,[p\,(s - s_c)]\}$; $dy = -\{1 - 2\,k^2\,sn^2\,[p\,(s - s_c)]\}\,ds$, woraus sich durch Integration ergiebt $y - y_c = -\int\{1 - 2\,k^2\,sn^2\,[p\,(s - s_c)]\}\,ds$; $y_c - y = s - \int 2\,k^2\,sn^2\,[p\,(s - s_c)]\,ds$.

Die Grösse y_c ist die noch unbekannte Integrationskonstante. Setzt man zur Abkürzung $[p\,(s - s_c)] = v$ und demgemäss $ds = \frac{dv}{p}$, so ist $y_c - y = s - \frac{2}{p}\,k^2\int sn^2\,(v)\,dv$.

Es ist aber (Appell-Lacour pag. 144)

$$k^2\int sn^2\,[v]\,dv = -\frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)} + v\cdot\frac{\Theta''(o)}{\Theta(o)}, \text{ also ist } y_c - y = s - \frac{2}{p}\left\{v\cdot\frac{\Theta''(o)}{\Theta(o)} - \frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)}\right\},$$

wo Θ die sogenannte Jacobi'sche Funktion ist. Diese Funktion $\Theta(v)$ ist durch folgendes unendliche Produkt dargestellt (Appell pag. 120)

$$\Theta(v) = A\left(1 - 2q\cos\frac{\pi v}{K} + q^2\right)\left(1 - 2q^3\cos\frac{\pi v}{K} + q^6\right)\cdots, \text{ worin } q = e^{-\pi\frac{K'}{K}},$$

wenn K das Viertel der reellen und K' der halbe Faktor der imaginären Periode von $sn\,(v)$ ist.

Setzt man kurz $\Theta(v) = A\cdot a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdots$, so ist

$$\Theta'(v) = A\cdot\{a_1'\cdot a_2\,a_3\,a_4\cdots + a_1\cdot a_2'\cdot a_3\cdot a_4\cdots + a_1\cdot a_2\cdot a_3'\cdot a_4\cdots + a_1\,a_2\,a_3\,a_4'\cdots + \cdots\} \text{ und}$$

$$\Theta''(v) = A\left\{\begin{array}{l} a_1''\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdots + a_1'\,a_2'\,a_3\,a_4\cdots + a_1'\,a_2\,a_3'\,a_4\cdots + a_1'\,a_2\,a_3\,a_4'\cdots + \cdots \\ a_1'\cdot a_2'\,a_3\,a_4\cdots + a_1\,a_2''\,a_3\,a_4\cdots + a_1\,a_2'\,a_3'\,a_4\cdots + a_1\,a_2'\,a_3\,a_4'\cdots + \cdots \\ a_1'\cdot a_2\,a_3'\,a_4\cdots + a_1\,a_2'\,a_3'\,a_4\cdots + a_1\,a_2\,a_3''\,a_4\cdots + a_1\,a_2\,a_3'\,a_4'\cdots + \cdots \\ a_1'\cdot a_2\,a_3\,a_4'\cdots + a_1\,a_2'\,a_3\,a_4'\cdots + a_1\,a_2\,a_3'\,a_4'\cdots + a_1\,a_2\,a_3\,a_4''\cdots + \cdots \\ \cdots\cdots + \cdots\cdots + \cdots\cdots + \cdots\cdots + \cdots \end{array}\right\},$$

woraus sich ergiebt

$$\frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)} = \frac{a_1'}{a_1} + \frac{a_2'}{a_2} + \frac{a_3'}{a_3} + \frac{a_4'}{a_4} + \cdots\cdots;$$

$$\frac{\Theta''(v)}{\Theta(v)} = \frac{a_1''}{a_1} + \frac{a_2''}{a_2} + \frac{a_3''}{a_3} + \frac{a_4''}{a_4} + \cdots\cdots + 2\,\frac{a_1'}{a_1}\sum_2^\infty\frac{a_n'}{a_n} + 2\,\frac{a_2'}{a_2}\sum_3^\infty\frac{a_n'}{a_n} + \cdots\cdots;$$

Da aber $a_1 = 1 - 2q\cos\frac{\pi v}{K} + q^2$ ist, so ist $a_1' = +2q\frac{\pi}{K}\sin\frac{\pi v}{K}$; $a_1'' = +2q\left(\frac{\pi}{K}\right)^2\cos\frac{\pi v}{K}$, und da

$a_2 = 1 - 2q^3\cos\frac{\pi v}{K} + q^6$ ist, so ist $a_2' = +2q^3\frac{\pi}{K}\sin\frac{\pi v}{K}$; $a_2'' = +2q^3\left(\frac{\pi}{K}\right)^2\cos\frac{\pi v}{K}$.

Man hat somit $\frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)} = 2\frac{\pi}{K}\sin\frac{\pi v}{K}\left\{\frac{q}{1 - 2q\cos\frac{\pi v}{K} + q^2} + \frac{q^3}{1 - 2q^3\cos\frac{\pi v}{K} + q^6} + \cdots\right\}$ und

$$\left[\frac{\Theta''(v)}{\Theta(v)}\right]_{v=o} = 2\left(\frac{\pi}{K}\right)^2\left\{\frac{q}{1 - 2q + q^2} + \frac{q^3}{1 - 2q^3 + q^6} + \cdots\right\},$$

weil die Glieder mit den Faktoren a_1'; a_2' etc. verschwinden, da diese für $v = o$ zu Null werden.

Setzt man nun zur Abkürzung $\left(\frac{2\pi}{K}\right)^2 \left\{\frac{q}{1-2q+q^2} + \frac{q^3}{1-2q^3+q^6} + \cdots\right\} = b$ und

$$\left\{\frac{q}{1-2q\cos\frac{\pi v}{K}+q^2} + \frac{q^3}{1-2q^3\cos\frac{\pi v}{K}+q^6} + \cdots\right\} = f\left\{\cos\frac{\pi v}{K}\right\},$$

so wird $y_c - y = s - \frac{2}{p}\left\{v - \frac{b}{2} - 2\frac{\pi}{K}\sin\frac{\pi v}{K}\cdot f\left[\cos\frac{\pi v}{K}\right]\right\}$, oder mit $v = p(s-s_c)$;

$$y_c - y = s - (s-s_c)\,b + \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\frac{\pi v}{K} f\left\{\cos\frac{\pi v}{K}\right\};$$

lässt man noch das konstante Glied $b \cdot s_c$ in die noch unbestimmte Konstante y_c eintreten, dann ist

$$y_c - y = s(1-b) + \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}p(s-s_c)\right]\cdot f\left\{\cos\left[\frac{\pi}{K}p(s-s_c)\right]\right\},$$

woraus sich ergiebt $y = y_c + (b-1)s - \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}p(s-s_c)\right] f\left\{\cos\left[\frac{\pi}{K}p(s-s_c)\right]\right\}$, und setzt man $b - 1 = a$, so hat man

Gl. 6) $$y = y_c + a\cdot s - \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}p(s-s_c)\right] f\left\{\cos\left[\frac{\pi}{K}p(s-s_c)\right]\right\},$$

worin y_c und s_c noch zu bestimmende Integrationskonstanten sind, während

$$a = \left(\frac{2\pi}{K}\right)^2\left\{\frac{q}{1-2q+q^2} + \frac{q^3}{1-2q^2+q^6} + \cdots\right\} - 1 \text{ ist, und}$$

$$f\left\{\cos\left[\frac{\pi}{K}p(s-s_c)\right]\right\} = \frac{q}{1-2q\cos\left[\frac{\pi}{K}p(s-s_c)\right]+q^2} + \frac{q^3}{1-2q^3\cos\left[\frac{\pi}{K}p(s-s_c)\right]+q^6} + \cdots \text{ ist.}$$

Die Grösse a hat, wie sich beim zweiten Fall ergiebt, eine sehr einfache Bedeutung.

Nun soll der Wert der Integrationskonstante s_c bestimmt werden. Dies kann mit Hilfe der Gleichung 5 geschehen, wenn man berücksichtigt, dass $x = x_a$ und $s = l$ zusammengehörige Werte sind, wenn mit l die Länge des Stabes bezeichnet wird zwischen Einspannungsquerschnitt und Stirnquerschnitt. Aus Gleichung 5 folgt $o = \frac{2k}{p}\,cn\,[p(l-s_c)]$, damit aber diese Gleichung erfüllt sei, muss $cn\,[p(l-s_c)] = o$ sein, d. h. es muss $p(l-s_c) = K$ sein.

Es ist also $l - s_c = \frac{1}{p}K$; $s_c = l - \frac{K}{p}$;

Gl. 7) $$s_c = \frac{1}{p}(pl - K).$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstante y_c dienen die zusammengehörigen Werte $s = o$; $y = o$, mit welchen aus Gleichung 6 folgt $o = y_c - \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}p(-s_c)\right]\cdot f\left\{\cos\left[\frac{\pi}{K}p(-s_c)\right]\right\}$, woraus

$$\text{mit } -s_c = \frac{1}{p}(K - pl);\ y_c = \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}(K-pl)\right]\cdot f\left\{\cos\left[\frac{\pi}{K}(K-pl)\right]\right\};$$

$$y_c = \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\pi - \frac{\pi}{K}pl\right]\cdot f\left\{\cos\left[\pi - \frac{\pi}{K}pl\right]\right\}.$$

Es ist aber $\sin\left[\pi - \frac{\pi}{K}pl\right] = +\sin\left[\frac{\pi}{K}pl\right]$; $\cos\left[\pi - \frac{\pi}{K}pl\right] = -\cos\left[\frac{\pi}{K}pl\right]$, also ist

Gl. 8) $$y_c = \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}pl\right]\cdot f\left\{-\cos\left[\frac{\pi}{K}pl\right]\right\}.$$

Mit dem Werte $-s_c = \frac{1}{p}(K - pl)$ hat man $p(s-s_c) = p\cdot s - p\cdot s_c = p\cdot s + K - p\cdot l$; $p(s-s_c) = K - p(l-s)$, so dass Gleichung 5 wird zu

Gl. 9) $$x_a - x = \frac{2k}{p} cn\,[K - p\,(l-s)]$$

und Gleichung 6 wird zu $y = y_c + as - \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}(K - p\,(l-s)\right]\cdot f\left\{\cos\left[\frac{\pi}{K}(K - p\,(l-s)\right]\right\}$;

$$y = y_c + as - \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\pi - \frac{\pi}{K}p\,(l-s)\right]\cdot f\left\{\cos\left[\pi - \frac{\pi}{K}p\,(l-s)\right]\right\},\ \text{also}$$

Gl. 10) $$y = y_c + as - \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}p\,(l-s)\right]\cdot f\left\{-\cos\left[\frac{\pi}{K}p\,(l-s)\right]\right\}.$$

Diese zwei Gleichungen geben für jede Bogenlänge s die Koordinaten x und y der elastischen Linie, falls p, k, K, q und x_a bekannt sind. Da aber $q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$ ist, so sind die noch anzugebenden Werte p, k, K, K' und x_a. Nun bestehen zwischen k und K' beziehungsweise K' folgende Beziehungen (Appell-Lacour pag. 156)

Gl. A) $$K = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \cdots + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right)^2 k^{2n} + \cdots\right]$$

und mit $k'^2 = 1 - k^2$

Gl. B) $$K' = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k'^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k'^4 + \cdots + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right)^2 k'^{2n} + \cdots\right].$$

Praktisch wird man zweckmässiger das zu k gehörige q aus einer der vorhandenen Tabellen entnehmen

Gl. A⁺] q aus Tabelle entsprechend k

und hat dann (Schlömilch Band II pag. 449)

Gl. B⁺] $$K = \frac{\pi}{2}\left[1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots\right]^2.$$

Es bleiben nun noch anzugeben die Werte von p, k und x_a.

Es sind aber zusammengehörig $s = o$, $x = o$ und $\varphi = o$; mit den zwei ersteren folgt aus Gleichung 9

Gl. C] $$x_a = \frac{2k}{p} cn\,[K - pl].$$

Ferner war allgemein (Seite 4) $\frac{dy}{ds} = -\{1 - 2k^2 sn^2\,[K - p\,(l-s)]\}$, und weil $\frac{dy}{ds} = \sin\varphi$ ist, φ aber für $s = o$ auch gleich null ist, so ist $1 - 2k^2 sn^2\,[K - pl] = o$, woraus folgt $sn^2\,[K - pl] = \frac{1}{2k^2}$.

Aus Gleichung C folgt aber $cn^2\,[K - pl] = \frac{p^2}{4k^2}\cdot x_a^2$, und da $sn^2(v) + cn^2(v) = 1$ ist, so ist $\frac{1}{2k^2} + \frac{p^2}{4k^2}x_a^2 = 1$; $1 + \frac{p^2}{2}x_a^2 = 2k^2$;

Gl. D] $$k^2 = \frac{1}{2} + \frac{p^2}{4}x_a^2.$$

Wie ursprünglich die Aufgabe gestellt war, war die Deformation angenommen, d. h x_a wurde als bekannt vorausgesetzt. Ist aber x_a bekannt, so können aus den Gleichungen C und D die Grössen k und p berechnet werden. Es wird aber in den meisten Fällen p gegeben sein, dann können aus den Gleichungen C und D die Grössen k und x_a berechnet werden.

Für die rechnerische Behandlung bedarf Gleichung C der Umformung. Da $cn\,[K+v] = -k' \frac{sn\,(v)}{dn\,(v)}$ ist, und $v = -pl$ ist, so hat man $cn\,[K-pl] = -k' \frac{sn\,(-pl)}{dn\,(-pl)}$, und da $sn\,(-v) = -sn\,(v)$, aber $dn\,(-v) = +dn\,(v)$ ist, so ist $cn\,[K-pl] = k' \frac{sn\,(pl)}{dn\,(pl)}$, also ist (Schlömilch pag. 420)

$$cn\,[K-pl] = \frac{2\pi}{kK}\left\{\frac{\sqrt{q}}{1+q}\sin\left[\frac{\pi}{2K}pl\right] - \frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3}\sin\left[\frac{3\pi}{2K}pl\right] + \frac{\sqrt{q^5}}{1+q^5}\sin\left[\frac{5\pi}{2K}pl\right] - \cdots\cdots\right\},$$

und die Gleichung C wird zu

Gl. C⁺] $$x_a = \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\left\{\frac{\sqrt{q}}{1+q}\sin\left[\frac{\pi}{2K}pl\right] - \frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3}\sin\left[\frac{3\pi}{2K}pl\right] + \frac{\sqrt{q^5}}{1+q^5}\sin\left[\frac{5\pi}{2K}pl\right] - \cdots\right\}.$$

Die gesuchten Werte für k und x_a finden sich nun durch successive Annäherung aus den Gleichungen D und C*. Man hat einen wahrscheinlichen Wert von x_a anzunehmen, mit demselben ein vorläufiges k aus Gleichung D zu berechnen, aus den Gleichungen A* und B* vorläufige Werte von q und K zu bestimmen und mit diesen aus Gleichung C* das sich ergebende x_a zu ermitteln. Dieses Verfahren hat man fortzusetzen, bis das sich ergebende x_a mit dem zuletzt angenommenen x_a übereinstimmt.

In den speziellen Fällen, wo der Stab sehr steif und die Last verhältnismässig klein ist, wird die Krümmung des Stabes nur gering sein, und x_a wird nur wenig von l verschieden sein. Dann kann als erste Annäherung $x_a = l$ gesetzt werden, so dass sich aus Gleichung D der vorläufige Wert ergiebt $k^2 = \frac{1}{2} + \frac{p^2}{4}l^2$.

Da ferner (Appell-Lacour pag. 135) $sn\,(pl) = pl\left\{1 - (k^2+1)\frac{p^2l^2}{6} + (k^4+14k^2+1)\frac{p^4l^4}{120} + \cdots\right\}$

und $dn\,(pl) = 1 - 3k^2\frac{p^2l^2}{6} + (5k^4+20k^2)\frac{p^4l^4}{120} + \cdots$, so ist

$$\frac{sn\,(pl)}{dn\,(pl)} = pl\cdot\left\{1 + (2k^2-1)\frac{p^2l^2}{6} + (1+16k^2(k^2-1))\frac{p^4l^4}{120} + \cdots\right\}$$

und $$cn\,[K-pl] = k'\,pl\left\{1 + (2k^2-1)\frac{p^2l^2}{6} + (1+16k^2[k^2-1])\frac{p^4l^4}{120} + \cdots\right\}.$$

Es wird also Gleichung C zu

Gl. C⁺⁺] $$x_a = 2kk'l\left\{1 + (2k^2-1)\frac{p^2l^2}{6} + [1+16k^2(k^2-1)]\frac{p^4l^4}{120} + \cdots\right\}.$$

In erster Annäherung ist aber $2k^2 - 1 = 1 + \frac{p^2}{2}l^2 - 1 = \frac{p^2l^2}{2}$ und

$$16k^2(k^2-1) = (8+4p^2l^2)\left(\frac{p^2l^2}{4} - \frac{1}{2}\right) = 2p^2l^2 - 4 + p^4l^4 - 2p^2l^2 = p^4l^4 - 4,$$

also $[1+16k^2(k^2-1)] = p^4l^4 - 3$.

Ferner ist $k'^2 = 1 - k^2$, also in erster Annäherung $k'^2 = \frac{1}{2} - \frac{p^2l^2}{4}$ und

$$2kk' = 2\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{p^2l^2}{4}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{p^2l^2}{4}\right)} = 2\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{p^4l^4}{16}} = \sqrt{1 - \frac{p^4l^4}{4}};$$

somit hat man in zweiter Annäherung

$$x_a = l\cdot\sqrt{1-\frac{p^4l^4}{4}}\left\{1 + \frac{p^4l^4}{12} - 3\frac{p^4l^4}{120} + \cdots\right\};\quad x_a = l\cdot\sqrt{1-\frac{p^4l^4}{4}}\left\{1 + \frac{7}{120}p^4l^4 + \cdots\right\},$$

und mit $\sqrt{1-\frac{p^4l^4}{4}} = \left(1-\frac{p^4l^4}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{p^4l^4}{4} + \cdots$; $x_a = l\cdot\left(1-\frac{1}{8}p^4l^4\right)\left(1+\frac{7}{120}p^4l^4\right)$

$$= l\left\{1 + \frac{7}{120}p^4l^4 - \frac{1}{8}p^4l^4 - \cdots\right\} = l\left\{1 - \left(\frac{1}{8} - \frac{7}{120}\right)p^4l^4\right\} = l\left\{1 - \frac{16}{240}p^4l^4\right\}.$$

Es wird also bei nur schwachen Krümmungen des Stabes in zweiter Annäherung Gleichung C zu

Gl. C⁺⁺⁺] $$x_a = l\left(1 - \frac{1}{15}p^4l^4\right).$$

Mit diesem Werte von x_a kann nun aus Gleichung D, wenn nötig, ein verbesserter Wert von k berechnet werden, dann ergiebt Gleichung C** einen verbesserten Wert von x_a.

Anmerkung. Bei dieser Aufgabe ist vorausgesetzt, dass die Last P in einem ganz bestimmten Punkte $s = l$ der Axe des Stabes angreift, so dass die Wirkungslinie der Last parallel mit sich bei der Deformation des Stabes verschoben wird, wie in Figur 5 dargestellt.

Es soll nun angenommen werden, dass der Last eine unverschiebliche Wirkungslinie angewiesen ist, dann werden bei der Deformation des Stabes immer andere Punkte der Axe zum Lastangriffspunkte, wie in Figur 6 dargestellt.

Bei dieser Annahme bleiben die Gleichungen 1 bis 10, A und B bestehen, während die Verwertung der Gleichungen C und D anderer Art wird.

Ohne Probieren ergiebt sich aus Gleichung D $k^2 = \frac{1}{2} + \frac{p^2}{4} \cdot x_a^2$, worin jetzt x_a gegeben ist.

Aus Gleichung C folgt durch Umformung $cn\,[K - pl] = \frac{p}{2k} x_a$; $K - pl = arg\ cn \left[\frac{p}{2k} x_a\right]$; $pl = K - arg\ cn \left[\frac{p}{2k} x_a\right]$; $l = \frac{1}{p}\left\{K - arg\ cn \left[\frac{p}{2k} x_a\right]\right\}$, so dass auch l ohne Probieren gefunden werden kann. In den speziellen Fällen, wo die Krümmung nur schwach ist, kann in Gleichung C** innerhalb der Klammern als erste Annäherung $l = x_a$ gesetzt werden, so dass man hat $x_a = 2kk'l\left\{1 + (2k^2 - 1)\frac{p^2 x_a^2}{6} + [1 + 16k^2(k^2 - 1)]\frac{p^4 x_a^4}{120} + \cdots\right\}$, also mit dem obigen Werte für k^2;

$$x_a = l\sqrt{1 - \frac{p^4 x_a^4}{4}}\left\{1 + \frac{7}{120} p^4 x_a^4\right\}, \text{ woraus } l = x_a\left(1 - \frac{p^4 x_a^4}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{1 + \frac{7}{120} p^4 x_a^4\right\}^{-1};$$

$$l = x_a\left(1 + \tfrac{1}{8} p^4 x_a^4\right)\left\{1 - \frac{7}{120} p^4 x_a^4\right\};\quad l = x_a\left[1 + \tfrac{1}{8} p^4 x_a^4 - \frac{7}{120} p^4 x_a^4\right];\quad l = x_a\left[1 + \tfrac{1}{15} p^4 x_a^4\right].$$

Auf die ursprüngliche Aufgabe zurückgehend, bei welcher x_a veränderlich ist, so hat man aus Gleichung D

$$x_a^2 = \frac{4}{p^2}\left(k^2 - \tfrac{1}{2}\right);\quad x_a = \frac{2}{p}\sqrt{k^2 - \tfrac{1}{2}}.$$

Es giebt also nur ein reelles x_a, wenn

$$k^2 => \tfrac{1}{2};\quad k => \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Da anderseits (Seite 3) $k = \sin\frac{\gamma}{2}$ ist, so giebt es anderseits nur ein reelles x_a, wenn $k <= 1$ ist.

Für vorliegende Aufgabe kann sich also k nur bewegen zwischen den Grenzen $\frac{1}{\sqrt{2}}$ und 1, demnach ist $\frac{1}{\sqrt{2}} <= k <= 1$.

Es ist aber der Grenzfall $k = 1$ für die Amplitudenfunktionen ein Fall der Entartung, auf welchen besonders eingegangen werden muss. Mit $k = \sin\frac{\gamma}{2} = 1$ wird Gleichung 2 zu

$$\frac{d\psi}{ds} = 2p\sqrt{1 - \sin^2\frac{\psi}{2}};$$

Gl. 2a)
$$\frac{d\psi}{ds} = 2p \cdot \cos\frac{\psi}{2}.$$

Durch Trennung der Variablen wird hieraus $2\,pds = \frac{d\psi}{\cos\frac{\psi}{2}}$; $pds = \frac{d\frac{\psi}{2}}{\cos\frac{\psi}{2}}$, und durch Integration

$$ps = \log tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{4}\right) + \log\frac{1}{c};\quad ps = \log\frac{1}{c}\, tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{4}\right).$$

Durch die Inversion erhält man $ce^{ps} = tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{4}\right)$, worin c eine noch unbekannte Integrationskonstante ist.

Nun ist $tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{4}\right)=\frac{1+tg\frac{\psi}{4}}{1-tg\frac{\psi}{4}}$, also ist

$$\left(1-tg\frac{\psi}{4}\right)\cdot c\cdot e^{\beta s}=1+tg\frac{\psi}{4};\quad c\cdot e^{\beta s}-1=(ce^{\beta s}+1)\,tg\frac{\psi}{4};\quad tg\frac{\psi}{4}=\frac{c\cdot e^{\beta s}-1}{c\cdot e^{\beta s}+1}.$$

Es ist aber $\sin\frac{\psi}{2}=\frac{2\,tg\frac{\psi}{4}}{1+tg^2\frac{\psi}{4}}$; $\cos\frac{\psi}{2}=\frac{1-tg^2\frac{\psi}{4}}{1+tg^2\frac{\psi}{4}}$, also ist

Gl. 3a) $$\sin\frac{\psi}{2}=\frac{c^2e^{2\beta s}-1}{c^2e^{2\beta s}+1}$$

Gl. 4a) $$\cos\frac{\psi}{2}=2\frac{c\cdot e^{\beta s}}{c^2e^{2\beta s}+1}.$$

Wegen Gleichung 2a ist also $\frac{d\psi}{ds}=4\cdot p\frac{c\cdot e^{\beta s}}{c^2e^{2\beta s}+1}$; nach Gleichung 1 ist aber $\frac{d\psi}{ds}=p^2(x_a-x)$, also hat man

Gl. 5a) $$x_a-x=\frac{4}{p}\frac{c\cdot e^{\beta s}}{c^2e^{2\beta s}+1}.$$

Ferner ist (Seite 4) $\frac{dy}{ds}=-\left(1-2\sin^2\frac{\psi}{2}\right)$, somit $-dy=\left(1-2\sin^2\frac{\psi}{2}\right)ds$.

Aus Gleichung 2a aber ergiebt sich $ds=\frac{d\psi}{2p\cos\frac{\psi}{2}}=\frac{d\frac{\psi}{2}}{p\cos\frac{\psi}{2}}$, also

$$-dy=\frac{1-2\left(1-\cos^2\frac{\psi}{2}\right)}{p\cdot\cos\frac{\psi}{2}}d\frac{\psi}{2};\quad -dy=\frac{-1+2\cos^2\frac{\psi}{2}}{p\cdot\cos\frac{\psi}{2}}d\frac{\psi}{2};\quad -dy=\frac{2}{p}\cos\frac{\psi}{2}d\frac{\psi}{2}-\frac{1}{p}\frac{d\frac{\psi}{2}}{\cos\frac{\psi}{2}},$$

woraus durch Integration, weil $pds=\frac{d\frac{\psi}{2}}{\cos\frac{\psi}{2}}$ ist,

$$y_c-y=\frac{2}{p}\int\cos\frac{\psi}{2}d\frac{\psi}{2}-\int ds;\quad y_c-y=\frac{2}{p}\sin\frac{\psi}{2}-s;\quad y_c-y=\frac{2}{p}\frac{c^2e^{2\beta s}-1}{c^2e^{2\beta s}+1}-s;$$

Gl. 6a) $$y=y_c+s-\frac{2}{p}\frac{c^2e^{2\beta s}-1}{c^2e^{2\beta s}+1}.$$

Nun sind noch die Integrationskonstanten c und y_c zu bestimmen. Es sind $s=o$ und $\psi=\frac{\pi}{2}$ zusammengehörige Werte, dann ist $\frac{\psi}{2}=\frac{\pi}{4}$ und man hat $\cos\frac{\psi}{2}=\sin\frac{\psi}{2}$, d. h. mit den Werten aus den Gleichungen 3a und 4a, wenn $s=o$ gesetzt wird,

$$\frac{2c}{c^2+1}=\frac{c^2-1}{c^2+1}=\frac{1}{\sqrt{2}},\text{ oder }2c=c^2-1;\quad c^2-2c-1=o;\quad c=1\pm\sqrt{1+1}=1\pm\sqrt{2}.$$

Nun ist der kleinste Wert von ψ der Wert $\frac{\pi}{2}$, der grösste aber ist hier, wo $k=1$ ist,

$$\gamma=2\,arc\sin(1)=\pi,$$

also bewegt sich der Winkel $\frac{\psi}{2}$ zwischen $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{2}$, so dass $\sin\frac{\psi}{2}$ und $\cos\frac{\psi}{2}$ beide positiv sind, und man hat als allein giltig

Gl. 7a) $$c=1+\sqrt{2}.$$

Wegen einer späteren Untersuchung soll $c=e^{-p\cdot s_c}$ gesetzt werden, dann ist $-p\cdot s_c=\log c$;

$$s_c=-\frac{1}{p}\log c.$$

Es sind ferner zusammengehörig $s = o$ und $y = o$, also giebt Gleichung 6a

$$o = y_c - \frac{2}{p}\frac{c^2-1}{c^2+1}; \quad y_c = \frac{2}{p}\frac{1}{\sqrt{2}};$$

Gl. 8a)
$$y_c = \frac{\sqrt{2}}{p}.$$

Ausserdem sind noch zusammengehörig $s = o$ und $x = o$, also ist nach Gleichung 5a

$$x_a = \frac{4}{p}\frac{c}{c^2+1}; \quad x_a = \frac{2}{p}\frac{2c}{c^2+1};$$

Gl. Ca)
$$x_a = \frac{\sqrt{2}}{p}$$

in Übereinstimmung mit dem Werte für x_a, den man aus Gleichung D mit $k = 1$ bekommt.

Nun sind noch zusammengehörig $s = l$ und $x = x_a$, also giebt Gleichung 5a

$$o = \frac{4}{p}\frac{c \cdot e^{pl}}{c^2 e^{2pl}+1}.$$

Diese Gleichung ist aber nur erfüllt, wenn $e^{2pl} = \infty$ ist, damit dies aber der Fall sei, muss $l = \infty$ sein.

Anmerkung. Die formal mögliche andere Lösung $p = \infty$ setzt, da $p = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$ ist, voraus, dass entweder $\mathfrak{J} = o$ ist, d. h. dass der Stab in einen vollkommen biegsamen Faden ausgeartet ist, oder dass $P = \infty$ ist; dann konzentriert sich die ganze Biegung auf die Einspannungsstelle, der Stab erscheint, trotzdem er steif ist, gegenüber der unendlich grossen Kraft, nur als ein vollkommen biegsamer Faden. Mit $p = \infty$ hat man richtig x konstant $= o$ und $y = s$, entsprechend einem gezogenen Faden, bei welchem die Deformation durch die Normalkraft vernachlässigt ist. [Es ist in dem Falle $p = \infty$ das Verhalten von $M_{\ddot{a}} = P(x_a - x)$ interessant. Da allgemein $P(x_a - x) = 4\frac{P}{p}\frac{c e^{ps}}{c^2 e^{2ps}+1}$, und da P proportional p^2 ist, so ist für $p = \infty$; $P(x_a - x) = \frac{\infty^2}{\infty}\cdot\frac{\infty_1}{\infty_1^2} = \frac{\infty}{\infty_1} = 0$, weil ∞_1 von höherer Ordnung ist als ∞. Es ist also $P(x_a - x) = o$ für alle x. Rechnet man aber direkt $P \cdot x_a$, so hat man $P x_a = \frac{P}{p}\sqrt{2} = \frac{\infty^2}{\infty} = \infty$. Für $x = o$ hat also $M_{\ddot{a}}$ zwei Werte, dies erklärt sich daraus, dass der Stab resp. Faden scharf um 90° abgebogen wird.]

Der obere Grenzfall $k = 1$ ist also nur möglich, wenn die Stablänge l unendlich gross ist. Da aber für $k = 1$ der Winkel γ den Wert π hat, so ist die Lastlinie selbst Berührende an die elastische Linie im Lastangriffspunkt. Nun sind aber die Koordinaten des Lastangriffspunktes in diesem Falle $x = x_a = \frac{\sqrt{2}}{p}$ und $y = y_a = y_c + l - \frac{2}{p}\frac{c^2 e^{2pl}-1}{c^2 e^{2pl}+1} = \infty$.

Es ist also, wenn $k = 1$ ist, die Lastlinie $x = x_a = \frac{\sqrt{2}}{p}$ Asymptote der elastischen Linie.

Ist die Stablänge endlich, so kann k den Wert 1 nicht annehmen; die elastische Linie kann bei endlicher Stablänge im Lastangriffspunkt nicht die Richtung der Kraft haben.

Beispiel für die Anwendung.

Ein Stab konstanten Querschnittes aus Schweisseisen ist mit seinem einen Ende horizontal eingespannt und trägt an seinem freien Ende die lotrechte Last P (Figur 7); welche Werte haben nach der Deformation die Koordinaten des Lastangriffspunktes?

Wenn für den Krümmungsradius nicht der genaue Wert

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}$$

sondern, wie üblich, als Annäherung

$$\varrho = \frac{1}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}$$

gesetzt wird, und wenn gleichzeitig die Änderungen der Abscissen vernachlässigt werden, so ist (vergleiche Grashof pag. 72) $x_a = l$; $y_a = \frac{P}{EJ}\frac{l^3}{3} = p^2\frac{l^3}{3}$. Ist nun $l = 400$ cm; $\mathfrak{J} = 100$ cm^4; $E = 2 \cdot 000 \cdot 000$ klg/cm^2, und das eine Mal $P_1 = 40$ klg, das andere Mal $P_2 = 80$ klg, so ist

$$p_1^2 = \frac{40}{2 \cdot 000 \cdot 000 \cdot 100}; \quad p_2^2 = \frac{80}{2 \cdot 000 \cdot 000 \cdot 100}; \quad p_1^2 = \frac{1}{5 \cdot 10^6}; \quad p_2^2 = \frac{2}{5 \cdot 10^6}; \text{ also ist}$$

$$y_{1a} = \frac{1}{5 \cdot 10^6} \cdot \frac{4^3 \cdot 10^6}{3}; \quad y_{2a} = 2 \cdot y_{1a}; \quad y_{1a} = \frac{4^3}{15} = 4{,}27 \text{ cm}; \quad y_{2a} = 8{,}53 \text{ cm}.$$

Nach den genauen Formeln ist die Rechnung wie folgt:

$$P_1 = 40 \text{ kg}; \quad p_1^2 = \frac{4}{5 \cdot 10^6}.$$

In zweiter Annäherung ist nach Gleichung C*** $x_a = l\left(1 - \frac{1}{15}p^4 l^4\right)$, hier ist also

$$x_a = 400\left(1 - \frac{1}{15}\frac{1}{5^2 \cdot 10^{12}} \cdot 4^4 \cdot 10^8\right); \quad x_a = 400\left(1 - \frac{1}{15}\frac{1}{25 \cdot 10^4}256\right);$$

$$x_a = 400\left(1 - \frac{0{,}6827}{10000}\right) = 400 \cdot 0{,}999932; \quad x_a = 399{,}97 \text{ cm}.$$

Es ist aber nach Gleichung D $k^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}p^2 \cdot x_a^2$; hier ist also $k^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 10^6} \cdot 399{,}97^2$; $k^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{20 \cdot 10^6} \cdot 159976$; $k^2 = 0{,}507999$; $k = 0{,}7127$.

Hiermit durch lineare Interpolation aus der Tafel Schlömilch Compendium II pag. 448 $q = 0{,}04421$; $q^2 = 0{,}00196$; $q^3 = 0{,}000086$; $q^4 = 0{,}0000038$; $q^5 = \cdots\cdots$; $q^6 = \cdots\cdots$

Es ist also nach Gleichung B*

$$K = \frac{\pi}{2}\left[1 + 0{,}08842 + 0{,}0000076 + \cdots\right]^2; \quad K = \frac{\pi}{2}\left[1{,}1847\right] = \pi \cdot 0{,}59235 = 1{,}8609.$$

Nun ist nach Gleichung 10, wenn $s = l$ gesetzt wird, $y_a = y_c + a \cdot l$.

Nach Gleichung 8 ist aber

$$y_c = \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}pl\right]\left\{\frac{q}{1 + 2q\cos\left[\frac{\pi}{K}pl\right] + q^2} + \frac{q^3}{1 + 2q^3\cos\left[\frac{\pi}{K}pl\right] + q^6}\right\}.$$

Hier ist $\frac{\pi}{K}pl = \frac{\pi}{1{,}8609} \cdot \frac{1}{\sqrt{5} \cdot 10^3} \cdot 400 = \pi \cdot \frac{1}{10{,}403} = 17^\circ\,18'\,00''$, also ist

$$\sin\left[\frac{\pi}{K}pl\right] = 0{,}29737; \quad \cos\left[\frac{\pi}{K}pl\right] = 0{,}95476,$$

und man hat

$$y_c = 4 \cdot \sqrt{5} \cdot 10^3 \frac{1}{0{,}59235}\ 0{,}29737\left\{\frac{0{,}04421}{1 + 2 \cdot 0{,}04421 \cdot 0{,}95476 + 0{,}002} + \frac{0{,}00009}{1 + 2 \cdot 0{,}00009 \cdot 0{,}95476 + 0}\right\}$$

$$= 4 \cdot \sqrt{5} \cdot 10^3 \cdot 0{,}50202\left\{\frac{0{,}04421}{1{,}08637} + \frac{0{,}00009}{1{,}00017}\right\}$$

$$= 4 \cdot \sqrt{5} \cdot 10^3 \cdot 0{,}50202\left\{\begin{matrix}0{,}04070 \\ 0{,}00009 \\ \hline 0{,}04079\end{matrix}\right\} = 4 \cdot \sqrt{5} \cdot 10^3 \cdot 0{,}02048; \quad y_c = 183{,}16 \text{ cm}.$$

Es ist ferner nach der Gleichung auf Seite 5

$$a = \left(\frac{2\pi}{K}\right)^2 \left(\frac{q}{1-2q+q^2} + \frac{q^3}{1-2q^3+q^6} + \cdots\right) - 1.$$

Hier ist

$$\frac{2\pi}{K} = \frac{2}{0{,}59235} = 3{,}37638; \quad \left(\frac{2\pi}{K}\right)^2 = 11{,}39992;$$

$$1 + a = 11{,}39992 \cdot \left(\frac{0{,}04421}{1 - 2 \cdot 0{,}04421 + 0{,}00196} + \frac{0{,}00009}{1 - 2 \cdot 0{,}00009 + 0}\right);$$

$$1 + a = 11{,}39992 \cdot \left(\frac{0{,}04421}{0{,}91354} + \frac{0{,}00009}{0{,}99982}\right);$$

$$1 + a = 11{,}39992 \cdot \left\{\begin{matrix} 0{,}04841 \\ 0{,}00009 \\ \hline 0{,}04850 \end{matrix}\right\} = 0{,}55290;$$

$$a = -(1 - 0{,}55290); \quad a = -0{,}44710; \quad a \cdot l = -178{,}84 \text{ cm}.$$

Es ergiebt sich somit durch die genauen Formeln, wenn $P_1 = 40$ kg ist,

$$x_a = 399{,}97 \text{ cm}; \quad y_a = 183{,}16 - 178{,}84; \quad y_a = 4{,}32 \text{ cm}.$$

Der Unterschied gegen die angenäherten Werte ist

$$\text{bei } x_a, \ \Delta = -\frac{3}{10} \text{ mm}; \quad \text{bei } y_a, \ \Delta = +\frac{5}{10} \text{ mm}.$$

Jetzt sei $P_2 = 80\,kg$; $p_2^2 = \frac{2}{5 \cdot 10^6}$.

In zweiter Annäherung ist nach Gleichung C*** $x_a = l\left(1 - \frac{1}{15} p^4 l^4\right)$, hier ist also

$x_a = 400\left(1 - \frac{1}{15} \frac{4}{5^2 \cdot 10^{12}} \cdot 4^4 \cdot 10^8\right)$, und mit Benützung des früheren Resultates

$$x_a = 400\left(1 - 4 \cdot \frac{0{,}6827}{10000}\right) = 400 \cdot 0{,}999727; \quad x_a = 399{,}89 \text{ cm}.$$

Es ist aber nach Gleichung D $k^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} p^2 \cdot x_a^2$, hier ist also $k^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5 \cdot 10^6} 399{,}89^2$; $k^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{10^7} \cdot 159912$; $k^2 = 0{,}50000 + 0{,}01599$; $k^2 = 0{,}515991$; $k = 0{,}71832$.

Für dieses k findet man durch lineare Interpolation aus der Tafel Schlömilch pag. 448 $q = 0{,}04523$; $q^2 = 0{,}002045$; $q^3 = 0{,}000092$; $q^4 = 0{,}000004$.

Es ist also nach Gleichung B*

$$K = \frac{\pi}{2}\left[1 + 0{,}09046 + 0{,}000008\right]^2; \quad K = \frac{\pi}{2} \cdot 1{,}18912 = \pi \cdot 0{,}59456 = 1{,}86787.$$

Demnach hat man hier

$\frac{\pi}{K} pl = \frac{\pi}{1{,}86787} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \frac{1}{10^3} \cdot 400 = \pi \cdot 0{,}13544$; $\frac{\pi}{K} pl = 24^\circ 22' 46''$, und es ist $\sin \frac{\pi}{K} pl = 0{,}41277$;

$$\cos \frac{\pi}{K} pl = 0{,}91083.$$

Es ist somit

$$y_c = 4 \cdot \frac{\sqrt{5} \cdot 10^3}{\sqrt{2}} \frac{1}{0{,}59456} 0{,}41277 \cdot \left\{\frac{0{,}04523}{1 + 2 \cdot 0{,}04523 \cdot 0{,}91083 + 0{,}002045} + \frac{0{,}000092}{1 + 2 \cdot 0{,}000092 \cdot 0{,}91083 + 0} + \cdots\right\};$$

$$y_c = 4 \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} 10^3 \cdot 0{,}69423 \left\{\frac{0{,}04523}{1{,}08444} + \frac{0{,}000092}{1{,}00017}\right\}$$

$$= 4 \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \cdot 10^3 \cdot 0{,}69423 \left\{\begin{matrix} 0{,}04171 \\ 0{,}00009 \\ \hline 0{,}04180 \end{matrix}\right\} = 4 \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} 10^3 \cdot 0{,}02902 = 183{,}56 \text{ cm}; \quad y_c = 183{,}56 \text{ cm}.$$

Es ist ferner hier

$$\frac{2\pi}{K} = \frac{2}{0{,}59456} = 3{,}36383; \quad \left(\frac{2\pi}{K}\right)^2 = 11{,}31535;$$

$$1 + a = 11{,}31535\left(\frac{0{,}04523}{1 - 2\cdot 0{,}04523 + 0{,}002045} + \frac{0{,}00009}{1 - 2\cdot 0{,}00009 + 0}\right) = 11{,}31535\left(\frac{0{,}04523}{0{,}91159} + \frac{0{,}00009}{0{,}99982}\right)$$

$$= 11{,}31535\left\{\begin{matrix}0{,}04962\\0{,}00009\\\hline 0{,}04971\end{matrix}\right\} = 0{,}56248;\quad a = -(1 - 0{,}56248);\quad a = -0{,}43752;\quad a\cdot l = -175{,}008\text{ cm}.$$

Es ergiebt sich somit durch die genauen Formeln, wenn $P_2 = 80$ kg ist, $x_a = 399{,}89$ cm; $y_a = 183{,}56 - 175{,}01$; $y_a = 8{,}55$ cm.

Der Unterschied gegen die angenäherten Werte ist

$$\text{bei } x_a,\ \Delta = -\frac{11}{10}\text{ mm};\quad \text{bei } y_a,\ \Delta = +\frac{2}{10}\text{ mm}.$$

In diesen beiden Beispielen sind die Differenzen in y_a so klein, dass sie jedenfalls nur von den Zufälligkeiten der Rechnung herrühren; die Krümmungen sind demnach innerhalb derjenigen Grenzen, innerhalb welcher die angenäherten Formeln vollständig genügen.

Nun soll bei einem Stabe $l = 400$ cm; $p^2 = \frac{1}{10^5}\cdot 1{,}07163$ gegeben sein, welches sind die Koordinaten des Lastangriffspunktes nach der Deformation?

Nach Gleichung D hat man $k^2 = \frac{1}{2} + \frac{p^2}{4}\cdot x_a^2$. Es soll nun x_a zu 349,4 cm geschätzt werden, also ist vorläufig

$$k^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{10^5}\cdot 1{,}07163\cdot 122080{,}36;\quad k^2 = \frac{1}{2} + 0{,}32706;\quad k^2 = 0{,}82706;\quad k = 0{,}90943$$

vorläufig. Jetzt soll mit diesem k nach Gleichung C** ein verbesserter Wert von x_a gerechnet werden.

Es ist $k'^2 = 1 - k^2 = 0{,}17294$; $k' = 0{,}41586$, also $2\,kk'l = 2\ 0{,}90943\cdot 0{,}41586\cdot 400$;

$2\,kk'l = 302{,}544$; $2k^2 - 1 = 0{,}65412$; $\frac{2k^2 - 1}{6} = 0{,}10902$; $k^2 - 1 = -0{,}17294$; $16k^2 = 13{,}23296$;

$$16k^2(k^2 - 1) = -2{,}28851;\quad 1 + 16k^2(k^2 - 1) = -1{,}28851;\quad \frac{1 + 16k^2(k^2 - 1)}{120} = -0{,}01074;$$

$$p^2l^2 = \frac{1}{10^5}\cdot 1{,}07163\cdot 160000 = 1{,}71461;\quad p^4l^4 = 2{,}93990;\quad \frac{2k^2 - 1}{6}\cdot p^2l^2 = 0{,}18692;$$

$$\frac{1 + 16k^2(k^2 - 1)}{120}p^4l^4 = -0{,}03157;$$

$$1{,}00000 + 0{,}18692;\quad 1{,}18692 - 0{,}03157 = 1{,}15535;\quad x_a = 302{,}544\cdot 1{,}15535;\quad x_a = 349.54421.$$

Das angenommene und das gerechnete x_a stimmen genügend überein, also ist $k = 0{,}90943$ endgültig.

Für dieses k findet man mit Hülfe der Tafel Schlömilch II pag. 448:

$$q = 0{,}10800;\quad q^2 = 0{,}01166;\quad q^3 = 0{,}00126;\quad q^4 = 0{,}00014.$$

Es ist also nach Gleichung B*

$$K = \frac{\pi}{2}\left[1 + 0{,}21600 + 0{,}00028\right]^2;\quad K = \frac{\pi}{2}\cdot 1{,}47934 = \pi\cdot 0{,}73967 = 2{,}32373.$$

Hiermit ist

$$\frac{\pi}{K}pl = \frac{\pi}{2{,}32373}\cdot\sqrt{\frac{1{,}07163}{10^5}}\cdot 400 = \frac{\pi}{2{,}32373}\cdot\frac{\sqrt{10{,}7163}}{10^3}\cdot 400 = \frac{\pi}{2{,}32373}\cdot\frac{3{,}27358}{10^3}\ 400$$

$= \pi\cdot 0{,}56350 = 101^\circ 25{,}8'$; $\frac{\pi}{K}pl = 90^\circ + 11^\circ 25{,}8'$, also ist

$$\sin\left[\frac{\pi}{K}pl\right] = \sin\left[90^\circ + 11^\circ 25{,}8'\right] = \cos\left[11^\circ 25{,}8'\right] = 0{,}98016;$$

$$\cos\left[\frac{\pi}{K}pl\right] = -\sin\left[11^\circ 25{,}8'\right] = -0{,}19817.$$

Man hat somit

$$y_c = 4\,\frac{10^3}{3{,}27358}\cdot\frac{1}{0{,}73967}\,0{,}98016\left\{\frac{0{,}10800}{1 - 2\cdot 0{,}108\cdot 0{,}19817 + 0{,}01166} + \frac{0{,}00126}{1 - 2\cdot 0{,}00126\cdot 0{,}19817 + 0}\right\};$$

$$y_c = 4\cdot\frac{10^3}{3{,}27358}\cdot\frac{1}{0{,}73967}\cdot 0{,}98016\left\{\frac{0{,}10800}{0{,}96886} + \frac{0{,}00126}{0{,}99950}\right\};$$

$$y_c = 4\cdot\frac{10^3}{3{,}27358}\cdot\frac{1}{0{,}73967}\cdot 0{,}98016\left\{\begin{matrix}0{,}11147\\0{,}00127\\\hline 0{,}11274\end{matrix}\right\};\quad y_c = 182{,}56\text{ cm}.$$

Ferner ist hier

$$\frac{2\pi}{K} = \frac{2}{0{,}73967} = 2{,}70390; \quad \left(\frac{2\pi}{K}\right)^2 = 7{,}31107;$$

$$1 + a = 7{,}31107 \left(\frac{0{,}10800}{1 - 2 \cdot 0{,}10800 + 0{,}01166} \right) + \frac{0{,}00126}{1 - 2 \cdot 0{,}00126 + 0} \Big);$$

$$1 + a = 7{,}31107 \left\{ \frac{0{,}10800}{0{,}79566} + \frac{0{,}00126}{0{,}99748} \right\};$$

$$1 + a = 7{,}31107 \left\{ \begin{matrix} 0{,}13571 \\ 0{,}00127 \\ \hline 0{,}13698 \end{matrix} \right\} = 1{,}00147;$$

$$a = +0{,}00147; \quad a \cdot l = +0{,}59 \text{ cm}.$$

Es ergiebt sich also bei dieser Aufgabe $y_a = 182{,}56 + 0{,}59$; $y_a = 183{,}15$ cm, und es ist schon gefunden worden $x_a = 349{,}54$ cm.

Obschon die angenäherten Formeln zur Voraussetzung haben, dass die ursprünglichen Hebelsarme sich nicht ändern, obschon sie also hier, wo der Hebelsarm der Last sich von 400 cm auf 349,54 cm verringert, gar nicht angewendet werden dürften, soll doch zum Vergleich y_a nach der angenäherten Formel berechnet werden. $y_a = p^2 \frac{l^3}{3} = \frac{1{,}07163}{10^5} \cdot \frac{4^3 \cdot 10^6}{3}$; $y_a = 228{,}6$ cm.

Das angenäherte y_a ist zu gross; dies rührt offenbar daher, dass die Momente infolge der zu grossen Hebelsarme zu gross ausfallen.

Bei dieser letzten Aufgabe war

$$p^2 = \frac{1{,}07163}{10^5}$$

gegeben. Wenn nun der Stab aus Schweisseisen war, so war

$$\frac{P}{2 \cdot 000 \cdot 000 \cdot J} = \frac{1{,}07163}{10^5}; \quad \frac{P}{J} = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 1{,}07163}{10^5}; \quad \frac{P}{J} = 21{,}43260.$$

Die Lösung hat nur so lange Gültigkeit, als die grösste Spannung kleiner als die Spannung an der Elasticitätsgrenze ist. Die Spannung an der Elasticitätsgrenze ist aber bei Schweisseisen $\sigma_g = 1600$ klg/cm².

Bei vorliegendem Stabe ist im Gleichgewichtszustand

$$\sigma_{max} = \frac{P \cdot x_a}{J} \cdot e,$$

wenn e der Abstand der äussersten Faser von der neutralen Axe ist, also muss

$$\frac{P \cdot x_a}{J} \cdot e <= 1600$$

sein, d. h.

$$e <= \frac{1600}{x_a} \left(\frac{J}{P}\right); \quad e <= \frac{1600}{349{,}54 \cdot 21{,}4326}; \quad e <= \frac{1600}{7491{,}55}; \quad e <= 0{,}214 \text{ cm}.$$

Angenommen der Querschnitt des Stabes sei ein Rechteck, mit der Breite $b = 2$ cm und der Höhe $h = 2 \cdot e = 0{,}42$ cm, dann ist

$$J = \frac{2 \cdot 0{,}42^3}{12} = 0{,}012 \text{ cm}^4; \quad P = 0{,}012 \cdot 21{,}4326 = 0{,}26 \text{ kg}; \quad \sigma_{max} = \frac{0{,}26 \cdot 349{,}54}{0{,}012} \cdot 0{,}21 = 1590 \text{ kg}.$$

Es findet sich demnach an diesem Beispiele bestätigt, dass die sich ergebenden Resultate bei starken Deformationen nur auf bandförmige Federn angewendet werden können.

Bei dem letzten Zahlenbeispiel hat sich zufällig ergeben, dass für $q = 0{,}10800$ der Wert von a sehr wenig von o verschieden ist. Es soll an dieser Stelle gleich zur späteren Benützung festgestellt werden, dass a mit genügender Annäherung $= o$ wird für $q = 0{,}10770$.

Wenn $q = 0{,}10770$ ist, dann ist $q^2 = 0{,}01159$; $q^3 = 0{,}00125$; $q^4 = 0{,}00014$;

$$K = \frac{\pi}{2} \Big\{ 1{,}00000 + 0{,}21540 + 0{,}00028 \Big\}^2; \quad K = \frac{\pi}{2} \cdot 1{,}47789 = \pi \cdot 0{,}73894 = 2{,}32144;$$

$$\frac{2\pi}{K} = \frac{2}{0{,}73894} = 2{,}70658; \quad \left(\frac{2\pi}{K}\right)^2 = 7{,}32557;$$

$$1+a = 7{,}32557\left(\frac{0{,}10770}{1-2\cdot 0{,}10770+0{,}01159}+\frac{0{,}00125}{1-2\cdot 0{,}00125+0}\right)$$

$$= 7{,}32557\left\{\begin{matrix}0{,}13526\\0{,}00125\\0{,}13651\end{matrix}\right\} = 1{,}00001\,;\quad a = 0$$

mit einer Abweichung jenseits der vierten Decimale.

Diesem $q = 0{,}10770$ entspricht $k = 0{,}90895$, und da $k = \sin\frac{\gamma}{2}$ ist, so ist $\frac{\gamma}{2} = 65°21{,}6'$; $\gamma = 130°43{,}2'$. Dem Winkel $\psi_a = \gamma$ entspricht der Winkel φ_a, wo $\varphi_a = \gamma - 90$; $\varphi_a = 40°43{,}2'$. Für den ersten Belastungsfall (nach Fig. 8) sind demnach folgende ausgezeichnete Werte vorhanden:

$$\varphi_a = 0;\ \gamma = 90°;\ k = \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}70711.$$

$$\varphi_a = 40°43{,}2';\ \gamma = 130°43{,}2';\ k = \sin\frac{\gamma}{2} = 0{,}90895.$$

$$\varphi_a = 90°;\ \gamma = 180°;\ k = \sin\frac{\gamma}{2} = 1{,}00000.$$

II. Teil.

Es mögen die Hauptformeln, welche die allgemeine Lösung der ursprünglichen Aufgabe bilden, an dieser Stelle zusammengestellt werden:

$$\frac{1}{\varrho} = p^2(x_a - x) = \frac{d\psi}{ds};$$

$$\sin\frac{\psi}{2} = k\,sn\,[K - p(l-s)];\quad \cos\frac{\psi}{2} = dn\,[K - p(l-s)];$$

$$dy = -\{1 - 2k^2 sn^2[K - p(l-s)]\}\,ds;$$

$$x_a = \frac{2k}{p}\,cn\,[K - pl];$$

$$x_a - x = \frac{2k}{p}\,cn\,[K - p(l-s)];$$

$$y = y_c + as - F\left\{\sin\left[\frac{\pi}{K}p(l-s)\right];\ \cos\left[\frac{\pi}{K}p(l-s)\right]\right\},$$

worin $F\{\dots\}$ sich aus Gleichung 10 ergiebt.

Nach den Voraussetzungen der ursprünglichen Aufgabe haben diese Formeln nur Gültigkeit von $s = o$ bis $s = l$, denn falls der Stab länger wäre als l, d. h. falls der Stab über den Lastangriffspunkt hinausragte, so wäre dieser hinausragende Teil geradlinig tangential an die elastische Linie im Lastangriffspunkt. Wenn man aber bei obigen Formeln von der Entstehung derselben ganz absieht, den Grössen k, K, p, l und damit auch den Grössen y_c und a die Bedeutung von Konstanten, der Grösse s aber die Bedeutung einer unabhängigen Variablen giebt, so ist durch diese Formeln eine unbegrenzte Kurve festgelegt. Das Studium dieser Kurve wird rückwärts wieder Schlüsse auf den belasteten Stab ermöglichen.

Die unabhängige Variable s stellt natürlich auch bei dieser Kurve die von O aus gemessene Bogenlänge dar, nur kann bei der Kurve s auch negative Werte annehmen, nämlich wenn von O aus rückwärts gegangen wird.

Da bei dieser Kurve $x_a - x = \frac{2k}{p}\,cn\,[K - p(l-s)]$ ist, so hat $x_a - x$ sein Maximum resp. sein Minimum, wenn $cn\,[K - p(l-s)]$ sein Maximum resp. sein Minimum hat.

Es ist aber $\underset{\max}{cn\,(v)} = 1$; $\underset{\min}{cn\,(v)} = -1$, also ist

$$\underset{\max}{(x_a - x)} = +\frac{2k}{p};\quad \underset{\min}{x} = x_a - \frac{2k}{p};\quad \underset{\min}{(x_a - x)} = -\frac{2k}{p};\quad \underset{\max}{x} = x_a + \frac{2k}{p}.$$

Der ganze Verlauf der Kurve ist somit eingeschlossen zwischen den zwei Parallelen zur y-A

welche links und rechts von x_a den Abstand $\frac{2k}{p}$ haben. Es ist aber $cn(v) = +1$ für $v = 0$; damit aber $K - p(l-s) = 0$ sei, muss $s = l - \frac{K}{p}$ sein.

Nach Gleichung 7 ist aber $l - \frac{K}{p} = s_c$, so dass s_c diejenige Bogenlänge ist, um welche der Kurvenpunkt von O entfernt ist, welchem $x_{\min}$ entspricht.

Ferner ist $cn(v) = -1$ für $v = 2K$; damit aber $K - p(l-s) = 2K$ sei, muss $s = l + \frac{K}{p}$ sein.

Also gehört zu $s = s_c = l - \frac{K}{p}$ das $x = x_a - \frac{2k}{p} = \min$ und zu $s = l + \frac{K}{p}$ das $x = x_a + \frac{2k}{p} = \max$.

Da x_a positiv ist, so ist in $x_a = \frac{2k}{p} cn[K - pl]$ der Wert von $cn[K - pl]$ positiv, ausserdem ist $cn[K - pl] < 1$, also ist $x_a < \frac{2k}{p}$ d. h. es ist $x_{\min}$ negativ; d. h. der dem $x_{\min}$ entsprechende Kurvenpunkt liegt links von O, und s_c ist eine negative Grösse, es ist also $\frac{K}{p} > l$.

Für $s = l - \frac{K}{p}$ ist $\sin\left[\frac{\pi}{K} p(l-s)\right] = \sin \pi = o$, also ist $F\{\cdots\}$ in der Gleichung für y gleich null, und für $x_{\min}$ hat man $y_{li} = y_c + a\left(l - \frac{K}{p}\right)$.

Für $s = l + \frac{K}{p}$ ist $\sin\left[\frac{\pi}{K} p(l-s)\right] = \sin(-\pi) = o$, also für $x_{\max}$ hat man

$$y_r = y_c + a\left(l + \frac{K}{p}\right) = y_{li} + 2a\frac{K}{p}.$$

Da für $s = l$; $y = y_a = y_c + al$ ist, so ist auch $y_{li} = y_a - a \cdot \frac{K}{p}$; $y_r = y_a + a \cdot \frac{K}{p}$.

Für $x_{\min}$ d. h. für $s = l - \frac{K}{p}$ ist $K - p(l-s) = o$, und infolge dessen $\sin\frac{\psi}{2} = o$; $\cos\frac{\psi}{2} = +1$; also ist $\psi = o$.

Für $x_{\max}$ d. h. für $s = l + \frac{K}{p}$ ist $K - p(l-s) = 2K$, also ist $\sin\frac{\psi}{2} = o$; $\cos\frac{\psi}{2} = 1$, und es ist wieder $\psi = o$.

Es ist also sowohl bei $x_{\min}$ als auch bei $x_{\max}$ die Tangente an die Kurve im Sinne der wachsenden s parallel der y-Axe aufwärts gerichtet.

Da $d\psi = p^2(x_a - x)\,ds$ ist, so ist bei wachsendem s der Kontingenzwinkel positiv, so lange $x_a > x$ ist, also ist $d\psi$ links von x_a positiv, rechts von x_a negativ, d. h. beim Fortschreiten von $x_{\min}$ über x_a nach $x_{\max}$ dreht sich zuerst die Tangente im Sinne der Bewegung des Uhrzeigers, wobei ψ von o auf γ wächst, von x_a an aber dreht sich die Tangente wieder rückwärts entgegen dem Sinne der Bewegung des Uhrzeigers, wobei ψ von γ auf o abnimmt. Nach dem getroffenen Übereinkommen bedeutet dies, dass in einem nach der Kurve gekrümmten Stabe die ursprünglich untere Faser links von x_a gedrückt, rechts von x_a aber gezogen wird.

Nimmt man links und rechts von x_a zwei gleiche Abstände $(x_a - x)$ so ist beiderseits der Kontingenzwinkel $d\psi$ von derselben absoluten Grösse, und die links und rechts von x_a liegenden Teilkurven sind infolge dessen im Bezug auf den Punkt x_a; y_a diametral symmetrisch. Da nun der Kurvenpunkt $s = o$ (Einspannungsstelle) eine zur x-Axe parallele Tangente hat, so hat auch der Punkt $s = 2l$ eine zur x-Axe parallele Tangente, und die Ordinaten dieses Punktes sind

$$x = 2x_a \text{ und } y = 2y_a.$$

Schreitet man bei wachsendem s rückwärts von $x_{\max}$ über x_a nach $x_{\min}$ zurück, so ist $d\psi$ rechts von x_a immer noch negativ, links von x_a wird es aber wieder positiv, also dreht sich auf dem Rückwege von $x_{\max}$ nach x_a die Tangente entgegen dem Sinne des Uhrzeigers, von x_a aber nach $x_{\min}$ dreht sie sich wieder im Sinne des Uhrzeigers, also ist auch auf dem Rückwege rechts von x_a in einem nach der Kurve gekrümmten Stabe die an der Einspannungsstelle nach unten gelegene Faser gezogen, während sie links von x_a wieder gedrückt ist. Nimmt man auf dem Hinwege und auf dem Rückwege Kurvenpunkte, welche von $x_{\max}$ gleiche Abstände haben, so haben sie auch von x_a gleiche Abstände $(x_a - x)$, also haben sie auch gleiche Kontingenzwinkel $d\psi$; es sind demnach die vor dem

der Abscisse x_{max} entsprechenden Kurvenpunkte und die hinter ihm gelegenen Teilkurven symmetrisch in Bezug auf die durch diesen Kurvenpunkt gehende Parallele zur x-Axe, denn die Tangente in dem Punkte ist ja zur x-Axe rechtwinkelig. Auf dem Hinwege ist bei x_a der Winkel $\psi = \gamma$, auf dem Rückwege ist bei x_a der Winkel $\psi = -\gamma$.

Schreitet man bei wachsendem s von dem Kurvenpunkte, in welchem zum zweiten Male $x = x_{min}$ wurde, wieder vorwärts über x_a nach x_{max}, so findet man durch dieselben Überlegungen, dass die vor dem der Abscisse x_{min} entsprechenden Kurvenpunkte und die hinter ihm gelegenen Teilkurven symmetrisch sind in Bezug auf die durch diesen Punkt gehende Parallele zur x-Axe.

Die ganze Kurve ist also eine Aufeinanderfolge von Kurvenstücken, die kongruent sind mit dem Kurvenstück $s = s_c$ bis $s = l$. Dieses Kurvenstück wird zuerst diametral um den Punkt $x_a y_a$ umgeklappt, d. h. um 180° um $x_a y_a$ gedreht, dann werden die beiden Stücke zusammen um die Gerade $y = y_r$ umgeklappt, und man ist so wieder zu einem dem x_{min} entsprechenden Kurvenpunkte angekommen; klappt man alles Vorausgehende um die durch diesen letzten Punkt gehende Parallele zur x-Axe, so erhält man die einem weiteren Umlauf von x_{min} nach x_{max} und zurück entsprechende Kurve.

Die dem ersten Umlauf von x_{min} nach x_{max} und zurück entsprechende Kurve ist in den Figuren 9 und 10 dargestellt für die zwei Annahmen $a < o$ und $a > o$. In diesen Figuren ist noch ein Teil der dem nächsten Umlauf entsprechenden Kurve hinzugefügt.

Nimmt man das eine Mal eine Bogenlänge $s = s_1$, das nächste Mal eine Bogenlänge $s_2 = s_1 \pm 4\frac{K}{p}$, so ist das eine Mal

$$x_a - x_1 = \frac{2k}{p} cn\,[K - p\,(l - s_1)]\,; \quad y_1 = y_c + a s_1 - F\left\{\sin\left[\frac{\pi}{K} p\,(l - s_1)\right];\ \cos\left[\frac{\pi}{K} p\,(l - s_1)\right]\right\},$$

das andere Mal

$$x_a - x_2 = \frac{2k}{p} cn\,[K - p\,(l - s_1) \pm 4K] = \frac{2k}{p} cn\,[K - p\,(l - s_1)];$$

$$y_2 = y_c + a \cdot s_1 \pm 4a\frac{K}{p} - F\left\{\sin\left[\frac{\pi}{K} p\,(l - s_1) \mp 4\pi\right];\ \cos\left[\frac{\pi}{K} p\,(l - s_1) \mp 4\pi\right]\right\};$$

$$y_2 = y_c + a s_1 \pm 4a\frac{K}{p} - F\left\{\sin\left[\frac{\pi}{K} p\,(l - s_1)\right];\ \cos\left[\frac{\pi}{K} p\,(l - s_1)\right]\right\}.$$

Wenn demnach die Bogenlänge von s_1 auf $s_2 = s_1 \pm 4\frac{K}{p}$ angewachsen ist, so wird

$$x_2 = x_1\,; \quad y_2 = y_1 \pm 4a\frac{K}{p}.$$

Aus den Figuren 9 und 10 ist zu entnehmen, dass dem ersten vollen Umlauf von x_{min} bis x_{max} und zurück die Bogenlänge $4\frac{K}{p}$ entspricht, denn $\frac{3K}{p} + l - \left(l - \frac{K}{p}\right) = 4\frac{K}{p}$.

Also ist das jedem folgenden Umlauf entsprechende Kurvenstück kongruent mit dem dem vorausgehenden Umlauf entsprechenden Kurvenstück und gegen dasselbe versetzt um

$$\Delta y = \pm 4a\frac{K}{p}.$$

Die Parallelen zur x-Axe durch jede der auf einander folgenden, dem x_{min} und dem x_{max} entsprechenden Kurvenpunkte sind für den ganzen unbegrenzten Verlauf der Kurve Symmetrieaxen. Diese Symmetrieaxen folgen in den Abständen $\frac{1}{2}\Delta y = 2a\frac{K}{p}$ auf einander.

Es war

$\frac{2k}{p} cn\,[K - pl] = x_a$, nun ist $cn\,[K - pl] = cn\,[K - pl - 4K] = cn\,[-pl - 3K] = cn\,[pl + 3K]$, also ist $\frac{2k}{p} cn\,[pl + 3K] = x_a$, oder $\frac{2k}{p} cn\left[K + p\left(\frac{2K}{p} + l\right)\right] = x_a$; ersetzt man also l durch $l + \frac{2K}{p}$ und $l + \frac{2K}{p}$ durch $l + \frac{4K}{p}$ etc., so haben alle diese Punkte die Abscisse x_a. Nun ist

$$\frac{\pi}{K}p\left(l-(l+\frac{2K}{p})\right)=\frac{\pi}{K}p\cdot\frac{2K}{p}=2\pi;\quad \frac{\pi}{K}p\left(l-(l+\frac{4K}{p})\right)=\frac{\pi}{K}p\cdot\frac{4K}{p}=4\ \pi,$$

so dass die zu diesen x_a gehörigen Ordinaten der Reihe nach sind

$$y=y_a;\quad y=y_a+2a\frac{K}{p};\quad y=y_a+4a\frac{K}{p}\ \text{etc.}$$

Alle die Kurvenpunkte mit der Abscisse x_a sind Wendepunkte, denn die Kurve bildet abwechselnd links und rechts von x_a Schleifen, in welchen ein nach diesen Schleifen gekrümmter Stab in der Faser, welche an der Einspannungsstelle unten liegt, links von x_a Druck, rechts von x_a aber Zug erfahren würde. In der ersten Hälfte jeden Umlaufes d. h. von $x_{\min}$ bis $x_{\max}$ liegt die untere Faser unten, in der zweiten Hälfte jeden Umlaufes d. h. von $x_{\max}$ bis $x_{\min}$ liegt die untere Faser aber oben. In den Schleifen links von x_a ist die untere Faser innen, in den Schleifen rechts von x_a ist die untere Faser aussen.

Aus der Figur 9 ist zu ersehen, dass wenn a negativ ist, die Kurve bei wachsendem s nach aufwärts verläuft; aus der Figur 10 ist zu ersehen, dass, wenn a positiv ist, die Kurve bei wachsendem s nach abwärts verläuft.

Sollen je die auf der einen und der anderen Seite von x_a aufeinanderfolgenden Schleifen sich berühren, so ersieht man aus der Figur 9, dass $2y_r=0$ sein muss, d. h. es muss $y_r=0$ sein, also muss

$$y_a+a\cdot\frac{K}{p}=0;\quad a\frac{K}{p}=-y_a;\quad a=-\frac{p}{K}\cdot y_a$$

sein; da y_a stets positiv ist, so ist diese Berührung nur bei negativem a möglich. Dieser Fall ist in Figur 11 dargestellt. Ist a negativ aber $>-\frac{p}{K}y_a$, d. h. ist absolut genommen $\left[a\frac{K}{p}\right]<y_a$, dann schneidet je auf der einen und auf der anderen Seite von x_a jede folgende Schleife die vorausgehende in zwei Punkten. Je mehr sich a der Null nähert, desto mehr nähern sich diese Schnittpunkte den Kurvenpunkten, welche den Abscissen $x=x_a$ und $x=x_{\min}$ resp. $x_{\max}$ entsprechen.

Ist $a=0$ geworden, dann wird ausser dem immer periodischen x auch die Ordinate y rein periodisch (vergl. Gl. 10), weil der Ausdruck $a\cdot s$ wegfällt. Der Abstand $\Delta y=4a\frac{K}{p}$ der zwei aufeinanderfolgenden Umläufen entsprechenden Kurvenstücke wird mit a zu null, also überdecken sich die einzelnen Umläufe unendlich oft, wie in Figur 12 dargestellt.

Solange $a<0$ ist, so lange sind die einzelnen Schleifen offen; für $a=0$ schliessen sie sich in dem gemeinsamen Punkte $x_a y_a$; für $a>0$ hat jede Schleife in sich einen Doppeltpunkt (Fig. 10).

Sollen wieder je die auf der einen und der anderen Seite von x_a auf einander folgenden Schleifen sich berühren, so ersieht man aus der Figur 10, dass $4a\frac{K}{p}-2y_{li}=0$ sein muss, also muss $a\frac{K}{p}=\frac{1}{3}y_a;\quad a=\frac{1}{3}\frac{p}{K}y_a$ sein.

Da y_a stets positiv ist, so ist diese Berührung nur bei positivem a möglich. Dieser Fall ist in Figur 13 dargestellt.

Ist a positiv aber $<\frac{1}{3}\frac{p}{K}y_a$, dann schneidet je auf der einen und auf der anderen Seite von x_a jede folgende Schleife die vorausgehende in zwei Punkten.

Die Resultate hinsichtlich der Wirkung von a sind zusammengefasst folgende:

$a<0$	Verlauf nach oben bei wachsendem s.
$a=0$	unendlichfache Überdeckung.
$a>0$	Verlauf nach unten bei wachsendem s.
$a<-\frac{p}{K}y_a$	offene Schleifen, die sich gegenseitig nicht schneiden.
$a=-\frac{p}{K}y_a$	offene Schleifen die sich berühren.
$0>a>-\frac{p}{K}y_a$	offene Schleifen, die sich gegenseitig in zwei Punkten schneiden.
$0<a<\frac{1}{3}\frac{p}{K}y_a$	Schleifen mit Doppeltpunkt, die sich gegenseitig in zwei Punkten schneiden.

$a = \frac{1}{3}\frac{p}{K} y_a$ Schleifen mit Doppeltpunkt, die sich berühren.

$a > \frac{1}{3}\frac{p}{K} y_a$ Schleifen mit Doppeltpunkt, die sich gegenseitig nicht schneiden.

Jetzt sind noch die Grenzfälle $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $k = 1$ zu behandeln.

Grenzfall $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Wenn $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, so ist (vergl. Seite 8) $x = 0$ und (vergl. Seite 15) $x_{min} = -\frac{\sqrt{2}}{p}$; $x_{max} = +\frac{\sqrt{2}}{p}$.

Der ganze Verlauf der Kurve ist somit eingeschlossen zwischen den zwei Parallelen zur y-Axe, welche links und rechts von dieser y-Axe den Abstand $\frac{\sqrt{2}}{p}$ haben. Diese Wendepunkte der Kurve liegen auf der y-Axe, und die Wendetangenten sind parallel zur x-Axe, denn hier ist

$$\gamma = 2\, arc \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 90°.$$

Da allgemein $x_a = \frac{2k}{p} cn\,[K - pl]$ ist, so ist die erste Bogenlänge, welche zu $x_a = 0$ hinführt, $l = 0$. Es ist also in die allgemeine Formeln überall für l der Wert 0 einzusetzen.

Die übrigen Bogenlängen, welche zu der Abscisse $x_a = 0$ hinführen, sind (vergl. Seite 17)

$$\frac{2K}{p};\quad \frac{4K}{p};\quad \frac{6K}{p} \text{ etc., wo } K = 1{,}854080,$$

welchen Bogenlängen auch in den allgemeinen Fällen $k > \frac{1}{\sqrt{2}}$ die zur x-Axe parallele Tangente zukommt.

Nun soll der Wert von a für $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ermittelt werden.

Für $k = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}70711$ findet man in Schlömilchs Tafel $q = 0{,}043215$; $q^2 = 0{,}001868$; $q^3 = 0{,}000081$; $q^4 = 0{,}000003$.

Dann ist $K = \frac{\pi}{2}\left\{1{,}000000 + 0{,}086430 + 0{,}000006\right\}^2$; $K = \frac{\pi}{2} \cdot 1{,}180343$;

$K = \pi \cdot 0{,}590172 = 1{,}854080$; $\frac{2\pi}{K} = \frac{2}{0{,}590172} = 3{,}388842$; $\left(\frac{2\pi}{K}\right)^2 = 11{,}484250$;

$$1 + a = 11{,}484250\left\{\frac{0{,}043215}{1 - 0{,}086430 + 0{,}001868} + \frac{0{,}000081}{1 - 0{,}000162 + 0{,}000003}\right\};$$

$$1 + a = 11{,}484250\left\{\frac{0{,}043215}{0{,}915438} + \frac{0{,}000081}{0{,}999841}\right\};$$

$$1 + a = 11{,}484250\left\{\begin{matrix}0{,}047207\\0{,}000081\\\hline 0{,}047288\end{matrix}\right\} = 0{,}543066;\quad a = -0{,}456954, \text{ wenn } k = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Da a sich negativ ergeben hat, so verläuft die Kurve bei wachsendem s nach oben.

Die erste zu $x = x_a$ gehörige Ordinate $y = y_a$ ist null, und da in $y_a = y_c + al$, $l = 0$ ist, so ist hier auch $y_c = 0$, wie sich übrigens auch aus Gleichung 8 mit $l = 0$ ergiebt.

Die übrigen zu $x = x_a$ gehörigen Ordinaten sind also

$$2a\frac{K}{p};\quad 4a\frac{K}{p};\quad 6a\frac{K}{p} \text{ etc.}$$

Die Bogenlängen, welche zu x_{max} führen, sind $\frac{K}{p}$; $\frac{5K}{p}$; $\frac{9K}{p}$ etc.; die Bogenlängen, welche zu x_{min} hinführen, sind $-\frac{K}{p}$; $\frac{3K}{p}$; $\frac{7K}{p}$ etc.

$$y_l \text{ ist } = -a\frac{K}{p};\quad y_r \text{ ist } = +a\frac{K}{p}.$$

Dieser Grenzfall ist in Figur 14 dargestellt.

Grenzfall $k = 1$.

Hier ist nach Gleichung 5a Seite 9 $x = x_a - \frac{4}{p} \cdot \frac{c \cdot e^{ps}}{c^2 e^{2ps} + 1}$. x erreicht sein Maximum oder Minimum, wenn $\frac{dx}{ds} = 0$ ist, es ist aber

$$\frac{dx}{ds} = -\frac{4}{p} \frac{(c^2 e^{2ps} + 1) pce^{ps} - ce^{ps}(2pc^2 e^{2ps})}{(c^2 \cdot e^{2ps} + 1)^2} = -\frac{4}{p} \frac{pce^{ps}[c^2 e^{2ps} + 1 - 2c^2 e^{2ps}]}{[c^2 \cdot e^{2ps} + 1]^2}$$

$$= -\frac{4}{p} \frac{[1 - c^2 e^{2ps}] pce^{ps}}{[c^2 \cdot e^{2ps} + 1]^2},$$

also ist $\frac{dx}{ds} = 0$, wenn 1) $e^{ps} = \infty$; d. h. wenn $s = \infty$ ist, 2) $c^2 e^{2ps} = 1$; d. h. wenn $e^{2ps} = \frac{1}{c^2}$; $e^{ps} = \frac{1}{c}$; $ps = -\log_n c$; $s = -\frac{1}{p} \log_n c$.

Wenn $s = \infty$ ist, so ist $x = x_a = \frac{\sqrt{2}}{p}$; wenn $s = -\frac{1}{p} \log_n c$ ist, so ist

$$x = x_a - \frac{4}{p} \cdot \frac{c \cdot e^{-\log c}}{c^2 \cdot e^{-2 \log c} + 1} = x_a - \frac{4}{p} \frac{1}{2}; \quad x = -\left(\frac{2}{p} - x_a\right) = -\frac{2 - \sqrt{2}}{p}.$$

Es ist also hier

$$x_{max} = x_a = \frac{\sqrt{2}}{p} \text{ für } s = \infty = l; \quad x_{min} = -\frac{2 - \sqrt{2}}{p} \text{ für } s = -\frac{1}{p} \log c.$$

Da nach Seite 9

$$-\frac{1}{p} \log_n c = s_c \text{ ist,}$$

so bedeutet s_c die Bogenlänge, um welche von O aus zurückgegangen werden muss, damit derjenige Kurvenpunkt erhalten werde, dem x_{min} als Abscisse entspricht.

Dem x_{max} entspricht

$$y_r = y_a = y_c + \infty - \frac{2}{p} \frac{\infty^2}{\infty^2}; \quad y_r = y_a = \infty.$$

Dem x_{min} entspricht

$$y_{li} = y_c - \frac{1}{p} \log_n c - \frac{2}{p} \frac{1 - 1}{1 + 1}; \quad y_{li} = y_c - \frac{1}{p} \log_n c; \quad y_{li} = \frac{\sqrt{2} - \log c}{p}.$$

Für x_{max} ist $s = \infty$, also ist nach Gleichungen 3a und 4a $\sin \frac{\psi}{2} = 1$; $\cos \frac{\psi}{2} = 0$, also ist $\psi = 180°$.

Für x_{min} ist $s = -\frac{1}{p} \log_n c$, also ist $\sin \frac{\psi}{2} = 0$; $\cos \frac{\psi}{2} = 1$, also ist $\psi = 0$.

Sowohl bei x_{min} als auch bei x_{max} ist die Tangente parallel der y-Axe, bei x_{min} ist sie aber für wachsendes s aufwärts, bei x_{max} ist sie für wachsendes s abwärts gerichtet.

Da die ganze Kurve links von x_a liegt, so ist bei wachsendem s der Kontingenzwinkel $d\psi$ stets positiv, ein nach der Kurve gekrümmter Stab würde stets in der Faser gedrückt sein, welche an der Einspannungsstelle unten ist.

Wenn man die Gleichungen 5a und 6a in folgender Form anschreibt

$$x_a - x = \frac{4}{p} \frac{1}{ce^{ps} + ce^{-1-ps}}; \quad y = y_c + s - \frac{2}{p} \frac{ce^{ps} - ce^{-1-ps}}{ce^{ps} + ce^{-1-ps}},$$

und für c den Wert e^{-psc} setzt, so hat man

$$x_a - x = \frac{4}{p} \frac{1}{e^{p(s-s_c)} + e^{-p(s-s_c)}}; \quad y = y_c + s - \frac{2}{p} \frac{e^{p(s-s_c)} - e^{-p(s-s_c)}}{e^{p(s-s_c)} + e^{-p(s-s_c)}};$$

$$y = y_c + s_c + (s - s_c) - \frac{2}{p} \frac{e^{p(s-s_c)} - e^{-p(s-s_c)}}{e^{p(s-s_c)} + e^{-p(s-s_c)}},$$

woraus, weil nach Seite 20 $y_c + s_c = y_{li}$ ist,

$$y = y_{li} + (s - s_c) - \frac{2}{p} \frac{e^{p(s-s_c)} - e^{-p(s-s_c)}}{e^{p(s-s_c)} + e^{-p(s-s_c)}} .$$

Setzt man nun das eine Mal $s - s_c = +\Delta s$, das andere Mal $s - s_c = -\Delta s$, so hat $x_a - x$ beide Mal denselben Wert, während $y - y_{li}$ Werte gleicher Grösse, aber verschiedenen Vorzeichens bekommt, also ist die Parallele zur x-Axe, welche durch den Kurvenpunkt geht, der dem x_{min} entspricht, eine Symmetrieaxe für die ganze Kurve. Dieser Grenzfall ist in Figur 15 dargestellt.

Es ist schon betont worden, dass von allen diesen Kurven nur derjenige Teil, der zwischen $s = o$ und $s = l$ liegt, den Seite 1 und Seite 2 angegebenen Voraussetzungen der ursprünglichen Aufgabe genügt.

Berücksichtigt man aber nun, dass im unbegrenzten Verlauf dieser Kurven stets an jeder Stelle, deren Abscisse x ist, der Krümmungsradius der Gleichung $\frac{1}{\varrho} = p^2 (x_a - x)$ genügt, so sieht man sofort, dass beliebige Stücke dieser Kurven als elastische Linien gekrümmter Stäbe aufgefasst werden können, sofern eine Belastung des betreffenden Stabes möglich ist, bei der an jeder Stelle x das Moment $M_{ä}$ der äusseren Kräfte im Zustand des Gleichgewichtes den Wert hat

$$M_{ä} = \frac{EJ}{\varrho} = EJp^2 \cdot (x_a - x) = P(x_a - x).$$

Das Erfülltsein der einzigen Bedingung $M_{ä} = P(x_a - x)$ ist das notwendige und hinreichende Kriterium dafür, dass das Kurvenstück die elastische Linie des betreffenden Stabes im Gleichgewichtszustande ist. Allerdings wird die grosse Mehrzahl dieser richtigen elastischen Linien sich nicht von selbst einstellen können, sondern der Stab nimmt die betreffende Krümmung erst an, wenn ihm eine vorübergehende künstliche Nachhülfe dazu zuteil geworden ist. Dies hat zur Folge, dass die Ergebnisse sich nur an schwachen Stäben verwirklichen lassen, bei welchen die künstliche Nachhilfe nicht übermässig grosse Kräfte verlangt. Praktisch werden die Stäbe gegen die Verbiegung senkrecht zur Ebene der elastischen Linie ein nicht unbedeutendes Trägheitsmoment haben müssen, damit ein unbeabsichtigtes seitliches Umfallen verhindert wird. Man kommt also wieder auf die bandförmigen Federn. Da, wo die Kurve sich selbst schneidet, müssten diese bandförmigen Federn zweiteilige Stellen haben, damit sie sich durchdringen können.

Das Übrige ergiebt sich aus den folgenden Figuren, deren jede einen aus den Figuren 9 und 10 sich ergebenden möglichen Belastungsfall darstellt. Vorderhand sollen nur solche Belastungsfälle abgeleitet werden, bei welchen der Stab an der Stelle $s = o$ rechtwinkelig zur Kraftrichtung eingespannt ist.

Setzt man voraus, dass in den aufeinanderfolgenden Figuren 16 bis 23 P, p und L dieselbe Grösse haben, so ist jede folgende Figur in einem grösseren Masstabe gezeichnet als die vorausgehende; dies hat den Vorteil, dass diese Figuren sich leicht vergleichen lassen mit den Urfiguren 9 und 10.

Da sich Seite 16 ergeben hat, dass $l < \frac{K}{p}$ ist, so kann man in den Fällen, wo l noch zu ermitteln ist, als sicher voraussagen, dass l zwischen den Grenzen o und $\frac{K}{p}$ eingeschlossen ist, also

$$o <= l < \frac{K}{p}.$$

In der ursprünglichen elastischen Linie Figur 3 und 4 ist $L = l$, also ist in Figur 3 und 4

$$\frac{K}{p} > L; \quad K > p \cdot L.$$

In Figur 16 ist $L = 2l$, also ist in Figur 16 $\frac{2K}{p} > L; \quad K > p \cdot \frac{L}{2}$.

In Figur 17 ist $L=\frac{K}{p}+l$; setzt man für l seinen untersten Grenzwert, so ist $l=o$, und infolge dessen $L=>\frac{K}{p}$; $K<=p\cdot L$. Setzt man für l seinen obersten Grenzwert, so ist $l=\frac{K}{p}$, und infolge dessen $L<\frac{2K}{p}$; $K>p\cdot\frac{L}{2}$, also ist in Figur 17 $p\cdot\frac{L}{2}<K<=p\cdot L$.

In Figur 18 ist $L=\frac{2K}{p}$, also ist in Figur 18 $K=p\cdot\frac{L}{2}$.

In Figur 19 ist $L=\frac{2K}{p}+l$, es ist somit $L=>\frac{2K}{p}$; $K<=p\cdot\frac{L}{2}$; $L<\frac{3K}{p}$; $K>p\cdot\frac{L}{3}$, also ist in Figur 19 $p\frac{L}{3}<K<=p\frac{L}{2}$.

In Figur 20 ist $L=\frac{2K}{p}+2l$, es ist somit $L=>\frac{2K}{p}$; $K<=p\frac{L}{2}$; $L<\frac{4K}{p}$; $K>p\frac{L}{4}$, also ist in Figur 20 $p\frac{L}{4}<K<=p\frac{L}{2}$.

In Figur 21 ist $L=\frac{3K}{p}+l$, es ist somit $L=>\frac{3K}{p}$; $K<=p\frac{L}{3}$; $L<\frac{4K}{p}$; $K>p\frac{L}{4}$, also ist in Figur 21 $p\frac{L}{4}<K<=p\frac{L}{3}$.

In Figur 22 ist $L=\frac{4K}{p}$, also ist in Figur 22 $K=p\cdot\frac{L}{4}$.

In Figur 23 ist $L=\frac{4K}{p}+l$, es ist somit $L=>\frac{4K}{p}$; $K<=p\frac{L}{4}$; $L<\frac{5K}{p}$; $K>p\frac{L}{5}$, also ist in Figur 23 $p\frac{L}{5}<K<=p\frac{L}{4}$.

Würde man in weiteren Figuren noch mehr Umläufe in die elastische Linie bei gleichem P, p und L einbeziehen, so würde der Wert von K ein immer kleinerer Bruchteil des Produktes $p\cdot L$ sein.

Nun ist nach Seite 19 der kleinste Wert, den bei einer Einspannung rechtwinkelig zur Kraftrichtung K annehmen kann,

$$K=1{,}854080 \text{ entsprechend } k=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Es ist also der angenommene Gleichgewichtsfall bei den betreffenden Werten von P, p und L nur möglich, wenn der Bruchteil von $p\cdot L$, kleiner oder gleich welchem bei demselben K sein muss, grösser oder gleich 1,854080 sich ergiebt, denn wenn

$$1{,}854080<=K<=p\frac{L}{n} \text{ ist, dann ist } p\frac{L}{n}=>1{,}854080.$$

Es folgt bei konstantem P, p und L aus diesen Ungleichungen, dass K um so kleiner wird, je mehr ganze Umläufe oder Teile von Umläufen der angenommene Gleichgewichtsfall enthalten soll.

War K ursprünglich $> 2{,}32144$ d. h. war $a>o$, so kann man es durch Vermehrung der Zahl der Umläufe dahin bringen, dass $K<2{,}32144$ wird, d. h. $a<o$ wird.

Wegen Gleichung A nehmen K und k gleichzeitig ab oder zu, also wird k durch Vermehrung der Anzahl der Umläufe verkleinert, durch Verminderung der Anzahl der Umläufe aber vergrössert.

Da nach Seite 8 $x_a=\frac{2}{p}\sqrt{k^2-\frac{1}{2}}$ ist, so nimmt x_a bei wachsender Anzahl der Umläufe ab, bei abnehmender Anzahl der Umläufe wird x_a aber grösser. Die Anzahl der Umläufe ist nicht auf ganze Zahlen beschränkt, sondern kann auch eine gebrochene oder gemischte Zahl sein.

Ferner ist nach Seite 15 $x_{max}-x_a=\frac{2k}{p}$, also nimmt bei wachsender Anzahl der Umläufe der Abstand des Scheitels einer Schleife vom Wendepunkt ab.

Der Abstand des Scheitels einer Schleife von der nächsten horizontalen Tangente ist $x_{max} - 2x_a$, d. h. $\frac{2k}{p} - x_a$ oder, weil $x_a = \frac{2}{p}\sqrt{k^2 - \frac{1}{2}}$ ist, $\frac{2k}{p} - \frac{2}{p}\sqrt{k^2\left(1 - \frac{1}{2k^2}\right)} = \frac{2k}{p}\left(1 - \left[1 - \frac{1}{2k^2}\right]^{\frac{1}{2}}\right)$.

Nun ist k in max $= 1$, aber in min $= \frac{1}{\sqrt{2}}$, also bewegt sich $\frac{1}{2k^2}$ zwischen den Grenzen $\left\{\begin{matrix}\frac{1}{2}\\1\end{matrix}\right.$, so dass man $\left[1 - \frac{1}{2k^2}\right]^{\frac{1}{2}}$ nach steigenden Potenzen von $\frac{1}{2k^2}$ entwickeln darf.

$$\frac{2k}{p} - x_a = \frac{2k}{p}\left\{1 - \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k^2}\right) + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{2k^2}\right)^2 - \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{2k^2}\right)^3 + \cdots\right)\right\};$$

$$\frac{2k}{p} - x_a = \frac{2k}{p}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k^2}\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2k^2}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2k^2}\right)^3 + \cdots\right\}$$

$$= \frac{2k}{p}\left\{\frac{1}{4}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{32}\frac{1}{k^4} + \frac{1}{128}\frac{1}{k^6} + \cdots\right\}$$

$$= \frac{2}{p}\left\{\frac{1}{4}\frac{1}{k} + \frac{1}{32}\frac{1}{k^3} + \frac{1}{128}\frac{1}{k^5} + \cdots\right\}.$$

Es wird also durch Vermehrung der Anzahl der Umläufe der Abstand des Scheitels einer Schleife von der nächsten horizontalen Tangente vergrössert, bei abnehmender Anzahl der Umläufe wird dieser Abstand verkleinert.

Es nimmt also bei wachsender Anzahl der Umläufe x_a schneller ab als $\frac{2k}{p}$.

Macht man z. B., wie in der Mitte von Figur 25 dargestellt, die erste Schleife rechts vollständig, so dass P im Wendepunkte hängt, so erhält man durch die Lösung der zugehörigen drei Gleichungen C, D und $L = \frac{2K}{p} + l$ (vergl. Fig. 19) einen gewissen Wert x_a.

Macht man aber, wie in Figur 25 oben dargestellt ist, die erste Schleife rechts nicht vollständig fertig, so dass P in einem Punkte hängt, wo ϱ nicht unendlich ist, so setzt dies vor allem voraus, dass zu P noch ein Endmoment M'' hinzugefügt wird, welches negativ ist, weil der betreffende Punkt rechts vom zugehörigen Wendepunkt ist. Gegen die Figur in der Mitte ist jetzt die Anzahl der Umläufe verringert, also ist $K_1 > K$; $k_1 > k$; $x_{1a} > x_a$; $\underset{\max}{x_1} - x_{1a} > \underset{\max}{x} - x_a$.

Macht man anderseits, wie in Figur 25 unten dargestellt ist, noch ein Stück der nächsten Schleife links hinzu, so dass P in einem Punkte hängt, wo ϱ nicht unendlich ist, so muss ein Endmoment M'' hinzugefügt sein, das positiv ist; gegen die Figur in der Mitte ist jetzt die Anzahl der Umläufe vergrössert, also ist $K_2 < K$; $k_2 < k$; $x_{2a} < x_a$; $\underset{\max}{x_2} - x_{2a} < \underset{\max}{x} - x_a$.

Wandert das Stabende aus der Schleife links über den Wendepunkt nach einem Punkte der Schleife rechts, so wachsen Abscisse des Stabendes und Abscisse x_a des Wendepunktes gleichzeitig, aber diese letztere wächst langsamer als jene, sie wird von jener in dem Augenblicke überholt, in welchem das Stabende im Wendepunkt ist. M'' hat hierbei natürlich eine variable Grösse.

Ähnliche Überlegungen lassen sich bei allen Gleichgewichtsfällen machen. Wenn z. B. das Stabende in der Gegend des Gleichgewichtsfalles der Figur 23 unter Hinzufügung der nötigen variablen M'' aus der Schleife links über den Wendepunkt nach der nächsten Schleife rechts wandert, so nimmt die Anzahl der Umläufe zu, also nimmt die Abscisse x_a des jeweils zugehörigen Wendepunktes ab; in diesem Falle bewegen sich die Abscissen des Stabendes und des Wendepunktes einander entgegen und kreuzen sich in dem Augenblicke, in welchem das Stabende im Wendepunkte ist.

Gleichgiltig, ob die Anzahl der Umläufe vergrössert oder vermindert worden ist, wenn das Stabende sich links vom Wendepunkt befindet, muss ein positives Endmoment, wenn es sich rechts vom Wendepunkt befindet, muss ein negatives Endmoment zu P hinzugefügt werden, damit Gleichgewicht möglich sei. (Fig. 24.)

Die aus den Figuren 16 bis 25 abgeleiteten Resultate beziehen sich auf die Fälle, in welchen der Stab bei $s = o$ eingespannt ist.

Man erhält aber auch richtige elastische Linien, wenn man die Einspannungsstelle rückwärts von $s = o$ nach $s = -\left(\frac{2K}{p} - 2l\right)$ versetzt.

Dann entspricht dem ursprünglichen Falle Figuren 3 und 4 die Figur 26. Ist λ die Stablänge, so ergiebt sich aus der Figur, dass $l = \frac{2K}{p} - \lambda$ ist.

Bezeichnet man ferner mit S die von der Einspannungsstelle aus gemessene Bogenlänge, so ist

$$s = S - \left(\frac{2K}{p} - 2l\right); \quad s = S - \frac{2K}{p} + \frac{4K}{p} - 2\lambda; \quad s = \frac{2K}{p} - 2\lambda + S,$$

und damit wird

$$l - s = \frac{2K}{p} - \lambda - \frac{2K}{p} + 2\lambda - S = \lambda - S, \text{ und es wird } \frac{\pi}{K} pl = \frac{\pi}{K}(2K - p\lambda) = 2\pi - \frac{\pi}{K} p\lambda,$$

$$\text{also ist } \sin\left[\frac{\pi}{K} pl\right] = -\sin\left[\frac{\pi}{K} p\lambda\right]; \quad \cos\left[\frac{\pi}{K} pl\right] = +\cos\left[\frac{\pi}{K} p\lambda\right],$$

und es wird Gleichung 8 zu

Gl. VIII) $$y_c = -\frac{4}{p}\frac{\pi}{K} \sin\left[\frac{\pi}{K} p\lambda\right] \cdot f\left\{-\cos\left[\frac{\pi}{K} p\lambda\right]\right\}.$$

Gleichung 9 wird zu

$$x_a - x = \frac{2k}{p} cn\,[K - p(\lambda - S)].$$

Gleichung 10 wird zu

$$y = y_c + 2a\frac{K}{p} - 2a\lambda + aS - \frac{4}{p}\frac{\pi}{K} \sin\left[\frac{\pi}{K} p(\lambda - S)\right] \cdot f\left\{-\cos\left[\frac{\pi}{K} p(\lambda - S)\right]\right\}.$$

Nun war bisher der Koordinatenursprung an der Einspannungsstelle und die Einspannungstangente war gegen die positiven x gerichtet. Klappt man in Figur 26 die elastische Linie um die y-Axe um und versetzt man O an die Einspannungsstelle, so hat man die Figur 27, in welcher also alle x das entgegengesetzte Vorzeichen haben, die y um $2y_{li}$ kleiner sind und S mit s übereinstimmt.

Bildet man zur Vorbereitung die Differenz

$$y_c + 2a\frac{K}{p} - 2a\lambda - 2y_{li},$$

so hat man nach Seite 16

$$y_c + 2a\frac{K}{p} - 2a\lambda - 2y_c - 2al + 2a\frac{K}{p}$$

$$= -y_c + 4a\frac{K}{p} - 2a(\lambda + l) = -y_c + 4a\frac{K}{p} - 2a \cdot 2\frac{K}{p} = -y_c.$$

Also hat man mit dem Koordinatensystem der Figur 27 die Gleichungen

Gl. IX) $$x_a - x = -\frac{2k}{p} cn\,[K - p(\lambda - s)]$$

Gl. X) $$y = -y_c + a \cdot s - \frac{4}{p}\frac{\pi}{K} \sin\left[\frac{\pi}{K} p(\lambda - s)\right] \cdot f\left\{-\cos\left[\frac{\pi}{K} p(\lambda - s)\right]\right\},$$

weil jetzt S mit s übereinstimmt.

Gleichung 3 wird zu

Gl. III) $$\sin\frac{\psi}{2} = -k\,sn\,[K - p(\lambda - s)].$$

Gleichung 4 bleibt bestehen

Gl. IV) $$\cos\frac{\psi}{2} = dn\,[K - p(\lambda - s)].$$

Die Gleichungen A und B resp. A* und B* bleiben bestehen, dagegen wird die Gleichung C zu

$$x_a = -\frac{2k}{p} cn\,[K - 2K + p\lambda]; \quad x_a = -\frac{2k}{p} cn\,[-K + p\lambda];$$

Gl. Γ] $$x_a = -\frac{2k}{p} cn\,[K - p\lambda].$$

Gleichung D bleibt bestehen, also

Gl. D] $$k^2 = \frac{1}{2} + \frac{p^2}{4} \cdot x_a^2.$$

Aus den Gleichungen Γ und D lassen sich x_a und k berechnen.

Bei der Berechnung von x_a aus Gleichung D hat man die negative Wurzel zu nehmen, d. h. es ist in diesem Falle

$$x_a = -\frac{2}{p}\sqrt{k^2 - \frac{1}{2}}.$$

Bemerkung. Hätte man von vornherein in Gleichung 2 Seite 3, wie zulässig, die negative Wurzel genommen, d. h. hätte man

$$\frac{d\psi}{ds} = -2p\sqrt{\sin^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\psi}{2}}$$

gesetzt, so wäre $u = sn[-p(s-s_c)] = -sn[p(s-s_c)]$ gewesen, also hätte man

$$\sin\frac{\psi}{2} = -k\,sn[p(s-s_c)]; \quad \cos\frac{\psi}{2} = dn[p(s-s_c)]$$

gefunden, wobei wohlverstanden k gleich dem Absolutwert von $\sin\frac{\gamma}{2}$ ist.

Damit wird Seite 4 $\frac{d\psi}{ds} = -2pk\,cn[p(s-s_c)]$,

und Gleichung 5 wird zu $x_a - x = -\frac{2k}{p}cn[p(s-s_c)]$.

Alles andere wäre unverändert geblieben, so dass sich auch auf diesem Wege ergeben hätte:

Gl. IX) $$x_a - x = -\frac{2k}{p}cn[K - p(\lambda - s)],$$

Gl. X) $$y = \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}p\lambda\right]\cdot f\left\{-\cos\left[\frac{\pi}{K}p\lambda\right]\right\} + a\cdot s - \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}p(\lambda-s)\right]\cdot f\left\{-\cos\left[\frac{\pi}{K}p(\lambda-s)\right]\right\},$$

Gl. Γ] $$x_a = -\frac{2k}{p}cn[K - p\lambda].$$

Stellt sich nun bei einem Stabe von der Länge L die Gleichgewichtslage nach Figuren 3 und 4 ein, so ist $L = l$, und man hat nach Seite 16 die Ungleichung

$$\frac{K_1}{p} > L; \quad K_1 > pL.$$

Stellt sich aber bei gleichbleibendem p und L die Gleichgewichtslage nach Figur 27 ein, so ist $L = \lambda$, und man hat, weil nach Seite 24 $l_2 = \frac{2K_2}{p} - \lambda$ und nach Seite 16 $\frac{K_2}{p} > l_2$ ist, die Ungleichung $\frac{K_2}{p} > \frac{2K_2}{p} - \lambda$; $\lambda > \frac{K_2}{p}$, hier also, weil $\lambda = L$ ist, $\frac{K_2}{p} < L$; $K_2 < p\cdot L$.

Es ist also $K_1 > K_2$ und infolge dessen $k_1 > k_2$ sowie dem Absolutwerte nach

$$|x_{a_1}| > |x_{a_2}|.$$

Diese zwei Gleichgewichtslagen sind in Figur 28 skizziert.

Weil hier $x_a = -\frac{2}{p}\sqrt{k_2^2 - \frac{1}{2}}$ ist, so ist natürlich wieder der kleinste Wert, den k haben kann, $k_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ entsprechend dem Grenzfall Figur 14. Dann ist $x_a = o$; damit aber in Gleichung Γ die Grösse $cn[K_2 - p\lambda]$ gleich null werde und gleichzeitig die Ungleichung $\lambda > \frac{K_2}{p}$ gewahrt bleibe, so muss $p\lambda = 2K_2$ sein, und weil dem $k_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ der Wert $K_2 = 1{,}854080$ entspricht, so ist

$\lambda = \frac{2 \cdot 1{,}854080}{p}$ die erste Bogenlänge, welche bei der Gleichgewichtslage der Figur 27 zu $x_a = 0$, somit überhaupt zu einem richtigen x_a hinführt, denn gemäss der Entstehung von Figur 27 kann der Lastangriffspunkt niemals rechts von der y-Axe liegen (vergl. S. 19). Dies wird sich nochmals zeigen in dem später zu behandelnden Fall der zur Einspannung parallelen Kraft.

Berücksichtigt man in der Beziehung $l_2 = \frac{2 K_2}{p} - \lambda$ den Umstand, dass $l_2 => 0$ ist, so sieht man, dass $\frac{2 K_2}{p} => \lambda$; $K_2 => p \frac{\lambda}{2}$ ist, oder mit $\lambda = L$, dass

$$K_2 => p \frac{L}{2} => 1{,}854080.$$

Es ist also bei dem Gleichgewichtsfall der Figur 27 K_2 wie folgt begrenzt:

$$1{,}854080 <= p \frac{L}{2} <= K_2 < pL.$$

Wenn $p \frac{L}{2}$ grösser geworden ist als 1,854080, so ist K_2 noch schneller gewachsen, je mehr $p \frac{L}{2}$ wächst, um so mehr nähert sich K_2 dem Werte $p \cdot L$. Diese Beziehungen werden in Figur 29 veranschaulicht.

Für die Berechnung von k und x_a aus den Gleichungen Γ und D auf Seite 25 muss der Weg der successiven Annäherung eingeschlagen werden. Ist z. B. λ nicht sehr viel grösser als $\frac{2 \cdot 1{,}854080}{p}$, so kann als erste Annäherung $-x_a = l_2 = \frac{2 K_2}{p} - \lambda$ gesetzt werden, dann ergiebt sich aus Gleichung D

$$k_2^2 = \frac{1}{2} + \frac{p^2}{4}\left(\frac{2 K_2}{p} - \lambda\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{p^2}{4}\left(\frac{4}{p^2} K_2^2 - \frac{4}{p} K_2 \cdot \lambda + \lambda^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{p^2}{4}\lambda^2 + K_2^2 - p K_2 \cdot \lambda = \frac{1}{2} + \frac{p^2}{4}\lambda^2 - K_2 (p\lambda - K_2).$$

Hierin kann als erste Annäherung $K_2 = 1{,}854080$ geschätzt werden, so dass als erste Annäherung sich ein gewisser Wert für k_2 ergiebt. Mit dieser ersten Annäherung kann direkt für K_2 ein verbesserter Wert ausgerechnet werden und damit k_2 nochmals gerechnet werden. Mit dem verbesserten Werte von k_2 wird mit Hilfe von Gleichung Γ eine zweite Annäherung von x_a gerechnet und mit Hilfe von Gleichung D eine zweite Annäherung von k_2 u. s. f. bis zwei aufeinanderfolgende Werte von k_2 und x_a genügend übereinstimmen. Wie auf Seite 7 angegeben, kann hierzu Gleichung Γ umgeformt werden zu einer der Gleichung C** entsprechenden Gleichung Γ**.

Vergleicht man die Figur 27 mit der Figur 19, so sieht man, dass die elastische Linie der Figur 27 sich in Figur 19 wiederfindet in dem Stücke, das sich von $s = 2\,l$ bis $s = L$ erstreckt. Legt man nun den Punkt O der Figur 27 der Reihe nach in den Punkt $s = 2\,l$ der Figuren 20—23, so sieht man, dass man von der Gleichgewichtslage Figur 27 ausgehend, bei gleichbleibendem P, p und L immer mehr Teile von Umläufen oder ganze Umläufe in die elastische Linie einbeziehen kann. Entsprechend den bei jenen Figuren gefundenen Resultaten nehmen K_2, k_2 und der Absolutwert von x_{2a} ab, wenn die elastische Linie eine grössere Anzahl vom Umläufen enthalten soll.

Die der Figur 23 entsprechende von der zweiten Gleichgewichtslage bei gleichbleibendem p, P und L ausgehende elastische Linie ist in Figur 30 dargestellt. Für diese Linie ist

$$L = \frac{2 K_2}{p} + \lambda.$$

Nun ist nach Seite 25 $\lambda > \frac{K_2}{p}$, also ist $L > \frac{3 K_2}{p}$, d. h. es ist $K_2 < p \frac{L}{3}$.

Ferner ist nach Seite 24 $\lambda = \frac{2 K_2}{p} - l_2$, es ist aber $l_2 => o$, also ist $\lambda <= \frac{2 K_2}{p}$, und es ist $L <= \frac{4 K_2}{p}$ d. h. es ist $K_2 => p \frac{L}{4}$.

Für den Gleichgewichtszustand der Figur 30 bestehen also die Ungleichungen:

$$p \frac{L}{4} <= K_2 < p \frac{L}{3}.$$

Der angenommene Gleichgewichtszustand ist hierbei nur möglich, wenn $K_2 = > 1{,}854080$ sich ergiebt. Die erste Bogenlänge, bei welcher dieser Gleichgewichtszustand möglich ist, ist nach Figur 14 $p\frac{L}{4} = 1{,}854080$. Wird $p\frac{L}{4}$ grösser als 1,854080 so wächst K_2 ebenfalls und nähert sich immer mehr dem Werte $p\frac{L}{3}$.

Aus Figur 30 leitet sich aufgrund derselben Überlegungen, die Seite 23 gemacht worden sind, die Figur 31 ab, welche drei aufeinander folgende Gleichgewichtszustände darstellt. Ebenso ist Figur 32 aus Figur 4 und Figur 33 aus Figur 27 entstanden.

Angenommen, an dem Stabende hänge nur die Last P, ein Endmoment M'' könne nicht hergestellt werden.

Es sei nun zuerst beabsichtigt, den Stab nach der elastischen Linie in der Mitte der Figur 32 einzustellen, es werde der Stab aber irrtümlich nach der oberen elastischen Linie eingestellt, dann fehlt von dem Augenblicke an, wo der Stab der Kraft P überlassen wird, das zu diesem Gleichgewicht erforderliche positive Endmoment M''; dies hat zur Folge, dass über die ganze Länge des Stabes die äusseren Momente $M_{\ddot{a}}$ kleiner sind als die der Krümmung entsprechenden inneren Momente M_i. Die inneren elastischen Kräfte des Stabes vermögen das Übermass der Krümmung rückgängig zu machen, der Stab streckt sich, bis P in dem Wendepunkt angelangt ist, womit sich der richtige Gleichgewichtszustand von selbst eingestellt hat.

Wird der Stab aber irrtümlich nach der unteren elastischen Linie der Figur 32 eingestellt, dann fehlt von dem Augenblicke an, wo der Stab der Kraft P überlassen wird, das zu diesem Gleichgewichte erforderliche negative Endmoment M''; dies hat zur Folge, dass von $s = o$ bis $s = l_2$ die positiven Momente zu gross, von $s = l_2$ bis $s = L$ aber die negativen Momente dem Absolutwert nach nicht gross genug sind, es bekommt der Stab auf seine ganze Länge in der unteren Faser einen Zuwachs an Druckspannung, er krümmt sich stärker in positiver Krümmung bis P in dem Wendepunkt angelangt ist, womit sich der richtige Gleichgewichtszustand von selbst eingestellt hat. Es ist also der Gleichgewichtszustand Figur 4 gegen kleine Fehler unempfindlich, er ist stabil.

Es sei fernerhin beabsichtigt, den Stab nach der elastischen Linie in der Mitte der Figur 33 einzustellen, es werde der Stab aber irrtümlich nach der unteren elastischen Linie eingestellt, dann fehlt von dem Augenblicke an, wo der Stab der Kraft P überlassen wird, das zu diesem Gleichgewichte erforderliche positive Endmoment M''; dies hat zur Folge, dass von $s = o$ bis $s = \lambda_2$ die negativen Momente absolut genommen zu gross, von $s = \lambda_2$ bis $s = L$ die positiven Momente aber nicht gross genug sind, es bekommt der Stab auf seine ganze Länge in der Faser, welche an der Einspannungsstelle unten ist, einen Zuwachs an Zugspannung, er krümmt sich stärker in negativer Krümmung, bis P in dem Wendepunkte angelangt ist, womit sich der richtige Gleichgewichtszustand von selbst eingestellt hat.

Wird der Stab aber irrtümlich nach der oberen elastischen Linie der Figur 33 eingestellt, dann fehlt von dem Augenblicke an, wo der Stab der Kraft P überlassen wird, das zu diesem Gleichgewichte erforderliche negative Endmoment M''; dies hat zur Folge, dass von $s = o$ bis $s = L$ die negativen Momente dem Absolutwert nach nicht gross genug sind, die äusseren Momente $M_{\ddot{a}}$ sind kleiner als die der Krümmung entsprechenden inneren Momente M_i. Die inneren elastischen Kräfte des Stabes vermögen das Übermass der Krümmung rückgängig zu machen, der Stab streckt sich in allen seinen Punkten und geht dabei in die weniger gekrümmte mittlere elastische Linie zurück, womit sich das Gleichgewicht von selbst eingestellt hat.

Es ist also der Gleichgewichtszustand Figur 27 gegen kleine Fehler unempfindlich, er ist stabil.

Ist es beabsichtigt, den Stab nach der elastischen Linie in der Mitte der Figur 25 einzustellen, wird er aber irrtümlich nach der oberen elastischen Linie eingestellt, dann fehlt von dem Augenblicke an, wo der Stab der Kraft P überlassen wird, das zu diesem Gleichgewicht erforderliche negative Endmoment M''; dies hat zur Folge, dass von $s = l_1$ bis $s = L$ die negativen Momente nicht gross genug, von $s = o$ bis $s = l_1$ die positiven Momente zu gross sind. Von $s = l_1$ bis $s = L$ streckt sich zwar der Stab, von $s = o$ bis $s = l_1$ aber wölbt er sich stärker. Nun ist aber die elastische

Linie in der Mitte durchgängig schwächer gekrümmt als die obere; weil also der Teil von $s = o$ bis $s = l_1$ wegen des Fehlens von M'' sich noch stärker krümmt als in der oberen Figur, so kann sich die richtige elastische Linie nicht von selbst einstellen.

Wird der Stab irrtümlich nach der unteren elastischen Linie der Figur 25 eingestellt, dann fehlt von dem Augenblicke an, wo der Stab der Kraft P überlassen wird, das zu diesem Gleichgewichte erforderliche positive Endmoment M''; dies hat zur Folge, dass von $s = l_2$ bis $s = \frac{2K_2}{p} + l_2$ die negativen Momente zu gross sind, dass aber von $s = o$ bis $s = l_2$ und von $s = \frac{2K_2}{p} + l_2$ bis $s = L$ die positiven Momente nicht gross genug sind. Der Stab wölbt sich zwar stärker von $s = l_2$ bis $s = \frac{2K_2}{p} + l_2$, in den übrigen Teilen streckt er sich. Nun ist aber die elastische Linie in der Mitte durchgängig stärker gekrümmt als die untere; weil also sich Teile des Stabes wegen des Fehlens von M'' noch schwächer krümmen als in der unteren elastischen Linie, so ist der Übergang zur richtigen elastischen Linie nicht mehr möglich.

Es ist also der Gleichgewichtszustand der Figur 19 gegen kleine Fehler des Einstellens empfindlich, er ist labil.

Fehlt in der oberen elastischen Linie der Figur 31 das positive Endmoment M'', so krümmen sich die negativ gekrümmten Teile noch stärker, die positiv gekrümmten Teile aber strecken sich; da aber die richtige in der Mitte verzeichnete elastische Linie durchgehend schwächer gekrümmt ist als die obere, und Teile der oberen sich noch stärker krümmen, so ist der Übergang zur richtigen elastischen Linie nicht möglich.

Fehlt in der unteren elastischen Linie der Figur 31 das negative Endmoment M'', so krümmen sich die positiv gekrümmten Teile stärker, die negativ gekrümmten Teile aber strecken sich. Da aber die richtige elastische Linie durchgängig stärker gekrümmt ist als die untere, und Teile der unteren sich noch mehr strecken, so ist der Übergang zur richtigen elastischen Linie nicht möglich.

Es ist also der Gleichgewichtszustand der Figur 30 ein labiler.

Die an den vier Beispielen gefundenen Resultate lassen sich in allgemeiner Form wie folgt ausdrücken:

Ist das eine Ende des Stabes eingespannt, das andere Ende frei und belastet mit einer zur Einspannung rechtwinkeligen Einzelkraft, so sind die Gleichgewichtslagen stabil, deren elastische Linien nur einerlei Krümmung haben, die Gleichgewichtslagen aber, deren elastische Linien zweierlei Krümmung haben, sind labil.

In Figur 34 sind drei Gleichgewichtslagen dargestellt; die Lage I entspricht der Figur 4, also dem Hauptfalle, die Lage II entspricht der Figur 19, die Lage III entspricht der Figur 27.

Die Gleichgewichtslage II ist labil, die Gleichgewichtslagen I und III sind stabil. Ein kleiner Fehler in der Einstellung der labilen Gleichgewichtslage hat ein »Umfallen« zur Folge, der Stab geht sei es in die stabile Gleichgewichtslage I, sei es in die stabile Gleichgewichtslage III über.

Nun ist Lage I nur an die immer erfüllte Bedingung gebunden (Seite 19) $L = l > o$, während die Lage II an die beschränkende Bedingung gebunden ist (Seite 22) $1{,}854080 <= K <= p\frac{L}{2}$, also an die Bedingung $p\frac{L}{2} => 1{,}854080$, und Lage III sich nur einstellen kann, wenn (Seite 26)

$$L = \lambda => \frac{2 \cdot 1{,}854080}{p} \text{ ist.}$$

Die Bedingungen, welche für Lagen II und III erfüllt sein müssen, sind identisch, es muss für beide $L => \frac{2 \cdot 1{,}854080}{p}$ sein.

Die Gleichgewichtslage I ist immer möglich, wenn aber $L => \frac{2 \cdot 1{,}854080}{p}$ ist, so sind ausser I noch die Gleichgewichtslagen II und III vorhanden, abgesehen von eventuell noch möglichen Gleichgewichtslagen mit noch mehr Umläufen.

Setzt man $1{,}854080 = K_a$, so kann obige Bedingung geschrieben werden

$$p^2 => \frac{4 \cdot K_a^2}{L^2} \text{ oder } P => 4 \cdot \frac{EJ K_a^2}{L^2}$$

oder, weil (Seite 19)

$$K_a = \frac{\pi}{2} 1{,}180343 \text{ ist, } P => \frac{EJ \pi^2 \cdot 1{,}180343^2}{L^2};$$

$$P => \frac{\pi^2 EJ}{L^2} \cdot 1{,}393210.$$

Solange $P <$ als obiger Wert ist, solange giebt es nur eine Gleichgewichtslage, die natürliche Gleichgewichtslage I. Wenn aber $P >$ als jener Wert ist, so giebt es drei Gleichgewichtslagen, deren die eine, Lage II, derart labil ist, dass der Stab entweder in die Lage I oder in die Lage III umfällt.

Ist P gerade gleich jenem Werte, so fallen Lagen II und III in eine Lage zusammen, welche die Eigentümlichkeiten der beiden Lagen derart in sich vereinigt, dass sie nach links hin stabil, nach rechts hin aber labil ist.

Anhang zum ersten Falle.

Lässt man in Figur 4 die Koordinatenaxen und die Kraft, wie sie sind, wird aber der Stab nicht in der Richtung der x-Axe eingespannt, sondern unter dem Winkel ε gegen diese x-Axe, d. h. hat man den in Figur 1a dargestellten Belastungsfall, so bleiben alle Ableitungen und Resultate des ersten Falles auch hier noch formal bestehen bis zu Seite 6, denn erst da sind die zusammengehörigen Werte $s = 0$; $x = 0$; $\varphi = 0$ benützt worden. In vorliegendem Falle der schiefen Einspannung sind aber nun $s = o$, $x = o$ und $\varphi = \varepsilon$ die entsprechenden zusammengehörigen Werte. Da $\sin \varphi = \frac{dy}{ds} = -\{1 - 2 k^2 sn^2 [K - p(l - s)]\}$ ist, so ist demnach für $s = o$

$$\sin \varepsilon = -\{1 - 2 k^2 sn^2 [K - pl]\}; \quad 2 k^2 sn^2 [K - pl] = 1 + \sin \varepsilon;$$

$$sn^2 [K - pl] = \frac{1 + \sin \varepsilon}{2 k^2}.$$

Es ist aber auch hier nach Gleichung C

$$cn^2 [K - pl] = \frac{p^2}{4 k^2} \cdot x_a^2, \text{ also ist hier } \frac{1 + \sin \varepsilon}{2 k^2} + \frac{p^2}{4 k^2} x_a^2 = 1;$$

Gl. D]
$$k^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sin \varepsilon}{2} + \frac{p^2}{4} x_a^2.$$

Nimmt man die Gleichung

Gl. C]
$$x_a = \frac{2 k}{p} cn [K - pl]$$

hinzu, so können aus diesen zwei Gleichungen k und x_a berechnet werden. Es bleibt auch Gleichung C** formal bestehen, es ist aber hier in erster Annäherung $x_a = l \cdot \cos \varepsilon$, also ist in erster Annäherung

$$k^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sin \varepsilon}{2} + \frac{p^2 l^2}{4} \cos^2 \varepsilon.$$

Man hat also in erster Annäherung

$$k'^2 = 1 - k^2 = \frac{1}{2} - \frac{\sin \varepsilon}{2} - \frac{p^2 l^2}{4} \cos^2 \varepsilon;$$

$$2 k^2 - 1 = 1 + \sin \varepsilon + \frac{p^2 l^2}{2} \cos^2 \varepsilon - 1 = \sin \varepsilon + \frac{p^2 l^2}{2} \cos^2 \varepsilon;$$

$$16 k^2 (k^2 - 1) = (8 + 8 \sin \varepsilon + 4 p^2 l^2 \cos^2 \varepsilon) \left(\frac{\sin \varepsilon}{2} + \frac{p^2 l^2}{4} \cos^2 \varepsilon - \frac{1}{2} \right) = \cos^2 \varepsilon (p^4 l^4 \cos^2 \varepsilon + 4 p^2 l^2 \sin \varepsilon - 4);$$

$$[1 + 16 k^2 (k^2 - 1)] = 1 + \cos^2 \varepsilon (p^4 l^4 \cos^2 \varepsilon + 4 p^2 l^2 \sin \varepsilon - 4).$$

Damit wird

$$\left\{1+(2k^2-1)\frac{p^2l^2}{6}+[1+16k^2(k^2-1)]\frac{p^4l^4}{120}+\cdots\right\}=\left\{1+\frac{\sin\varepsilon}{6}p^2l^2+\frac{p^4l^4}{120}(1+6\cos^2\varepsilon)\right\}.$$

Ferner ist

$$2kk'=2\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sin\varepsilon}{2}+\frac{p^2l^2}{4}\cos^2\varepsilon\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sin\varepsilon}{2}-\frac{p^2l^2}{4}\cos^2\varepsilon\right)}=\cos\varepsilon\left[1-\frac{p^2l^2}{2}(\sin\varepsilon+\frac{p^2l^2}{4}\cos^2\varepsilon)\right].$$

Also ist in zweiter Annäherung

$$x_a=l\cdot\cos\varepsilon\left[1-\frac{p^2l^2}{2}\sin\varepsilon-\frac{p^4l^4}{8}\cos^2\varepsilon\right]\cdot\left\{1+\frac{p^2l^2}{6}\sin\varepsilon+\frac{p^4l^4}{120}(1+6\cos^2\varepsilon)\right\};$$

Gl. C^{+++}] $$x_a=l\cdot\cos\varepsilon\left[1-\frac{p^2l^2}{3}\sin\varepsilon-\frac{p^4l^4}{120}(9-\cos^2\varepsilon)\right].$$

Daraus $$x_a=l\cdot\cos\varepsilon\left[1-\frac{p^2l^2}{3}\sin\varepsilon-\frac{p^4l^4}{120}(8+\sin^2\varepsilon)\right];$$

$$x_a=l\cdot\cos\varepsilon\left[1-\frac{p^4l^4}{15}-\frac{p^2l^2}{3}\sin\varepsilon-\frac{p^4l^4}{120}\sin^2\varepsilon\right],$$

und da kleine ε vorausgesetzt sind, so ist mit genügender Annäherung

Gl. C^{++++}] $$x_a=l\cdot\cos\varepsilon\left[1-\frac{p^4l^4}{15}-\frac{p^2l^2}{3}\sin\varepsilon\right],$$

in Übereinstimmung mit der Gleichung auf Seite 7, wenn $\varepsilon=0$ ist.

Die zweckentsprechende Anwendung der Gleichungen C und D auf Seite 29 giebt die Lösung der allgemeinsten Aufgabe, bei welcher die Kraft P gegen die Einspannung beliebig gerichtet ist.

Zweiter Fall.

Der ursprünglich gerade gewichtslose Stab wird in der Krümmung erhalten durch eine im Schwerpunkt des freien Stirnquerschnittes angreifende Einzelkraft P, welche der Richtung der Einspannung parallel ist.

I. Teil.

Aufgrund der Überlegungen, die Seite 1 und 2 gemacht wurden, ergiebt sich auch hier, wenn nur die reine Biegung vorerst Berücksichtigung findet, dass in jeder Gleichgewichtslage $\frac{1}{\varrho}=\frac{M_{\ddot{a}}}{EJ}$ ist. Wird die elastische Linie des Stabes auf ein rechtwinkeliges Koordinatensystem bezogen, dessen x-Axe die Richtung der Einspannung hat und durch den Lastangriffspunkt geht, dessen y-Axe aber durch die Einspannungsstelle geht, so hat man die Darstellung der Figur 35.

Wird hier wieder $M_{\ddot{a}}$ als positiv definiert, wenn das auf einen Querschnitt bezogene Moment der zwischen Querschnitt und freiem Stabende angreifenden Kräfte den Sinn der Uhrzeigerbewegung hat, so ist der Krümmungsradius ϱ positiv, wenn der betreffende Stabteil so gekrümmt ist, dass diejenige äusserste Faser gedrückt ist, welche im ursprünglichen geraden Stabe die unterste Faser war.

Nun ergiebt sich aus Figur 35 $M_{\ddot{a}}=+P(-y)$, also ist $\frac{1}{\varrho}=\frac{P}{EJ}(-y)$, d. h. ϱ ist positiv, so lange y negativ ist, ϱ ist aber negativ, wenn y positiv ist.

Setzt man zur Abkürzung $\frac{P}{EJ}=p^2$, so ist $\frac{1}{\varrho}=-p^2y$, und da $\frac{1}{\varrho}=\frac{d\varphi}{ds}$ ist, so hat man

$$\frac{d\varphi}{ds}=-p^2y.$$

Beim Fortschreiten im Sinne der wachsenden s, d. h. von der Einspannung gegen den Lastangriffspunkt zu, dreht sich die Tangente im Sinne der Uhrzeigerbewegung solange y negativ ist, entgegen dem Sinne der Uhrzeigerbewegung, wenn y positiv ist.

Aus der Gleichung

Gl. 1) $$\frac{d\varphi}{ds} = -p^2 y$$

folgt durch Differentiation nach ds; $\frac{d^2\varphi}{ds^2} = -p^2 \frac{dy}{ds} = -p^2 \sin\varphi$, und wird nun mit $2\frac{d\varphi}{ds}$ erweitert, so ist

$$2\frac{d\varphi}{ds}\frac{d^2\varphi}{ds^2} = -2p^2 \sin\varphi \frac{d\varphi}{ds}, \text{ also } \frac{d}{ds}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = -2p^2 \sin\varphi \frac{d\varphi}{ds};$$

$$d\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = -2p^2 \sin\varphi\, d\varphi; \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = +2p^2 \cos\varphi + C_1.$$

Nun ist für $y = 0$ nach Gleichung 1 $\frac{d\varphi}{ds} = 0$ und in Figur 35 ist für $y = 0$ der Winkel φ mit α bezeichnet, also ist $o = 2p^2 \cos\alpha + C_1$; $C_1 = -2p^2 \cos\alpha$, demnach ist

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 2p^2(\cos\varphi - \cos\alpha).$$

Nun ist aber $\cos\varphi = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$; $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, also ist

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 2p^2\left(2\sin^2\frac{\alpha}{2} - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right);$$

Gl. 2) $$\frac{d\varphi}{ds} = \pm 2p\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Nach der getroffenen Wahl in der Figur ist das positive Vorzeichen zu wählen.

$$\text{Demnach } \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}} = 2p\,ds.$$

Führt man die neue Variable ein $u = \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, so ist $\sin\frac{\varphi}{2} = u\sin\frac{\alpha}{2}$, und da $du = \frac{\cos\frac{\varphi}{2}\, d\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, so ist umgekehrt $d\varphi = 2\,du\,\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}}$; $d\varphi = 2\,du\,\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi}{2}}}$; $d\varphi = 2\,du\,\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1-u^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$.

Es ist also mit dieser Substitution

$$2p\,ds = \frac{1}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}(1-u^2)}} \cdot \frac{2\cdot du\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1-u^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}; \quad 2p\,ds = \frac{2\,du}{\sqrt{\left(1-u^2\right)\left(1-u^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}}.$$

Zur Abkürzung soll jetzt $\sin\frac{\alpha}{2} = k$ gesetzt werden, so dass umgekehrt $\alpha = 2\,arc\sin k$ ist. Man hat somit $p\,ds = \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$. Hieraus ergiebt sich durch Integration

$$p(s - s_c) = \int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

worin s_c eine noch unbekannte Konstante ist. Die Inversion dieses Integrales giebt $u = sn[p(s - s_c)]$.

Da $s = 0$ und $\varphi = 0$ zusammengehörige Werte sind, und $\sin\frac{\varphi}{2} = u \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$ ist, so ist für $s = 0$ auch $u = 0$, somit $0 = sn[p(-s_c)]$, d. h. es ist $s_c = 0$, und man hat $u = sn[p\,s]$, woraus folgt

Gl. 3) $$\sin\frac{\varphi}{2} = k \cdot sn[ps].$$

Da ferner $\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{1 - \sin^2\frac{\varphi}{2}}$ ist, so ist $\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{1 - k^2 sn^2[ps]}$;

Gl. 4) $$\cos\frac{\varphi}{2} = dn\,[ps].$$

Nach Gleichung 2 ist $\frac{d\varphi}{ds} = 2pk\sqrt{1 - sn^2[ps]}$; $\frac{d\varphi}{ds} = 2pk \cdot cn\,[ps]$.

Nach Gleichung 1 ist aber $\frac{d\varphi}{ds} = -p^2 y$, also ist $-p^2 \cdot y = 2pk \cdot cn\,[ps]$;

Gl. 5) $$y = -2\frac{k}{p}cn\,[ps].$$

Ferner ist allgemein $\frac{dx}{ds} = \cos\varphi$ oder $\frac{dx}{ds} = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$; $\frac{dx}{ds} = 1 - 2k^2\,sn^2\,[ps]$, also ist $dx = (1 - 2k^2\,sn^2\,[ps])\,ds$, woraus sich durch Integration ergiebt $x - x_c = s - 2k^2\int sn^2\,[ps]\,ds$, wenn x_c eine noch unbekannte Konstante ist.

Setzt man zur Abkürzung $p \cdot s = v$ und demgemäss $ds = \frac{dv}{p}$, so ist

$$x - x_c = s - \frac{2}{p}k^2\int sn^2\,(v)\,dv; \quad x - x_c = s - \frac{2}{p}\left\{v \cdot \frac{\Theta''(o)}{\Theta(o)} - \frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)}\right\}.$$

Mit Benützung der beim ersten Falle auf Seiten 4 und 5 gemachten Ableitungen ergiebt sich

$$x - x_c = s - \frac{2}{p}\left\{v \cdot \frac{b}{2} - 2\frac{\pi}{K}\sin\frac{\pi v}{K} \cdot f\left(\cos\frac{\pi v}{K}\right)\right\} \text{ oder mit } v = ps;$$

$$x - x_c = s - sb + \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}ps\right] \cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}ps\right]\right);$$

$$x - x_c = s(1 - b) + \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}ps\right] \cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}ps\right]\right).$$

Zur Bestimmung von x_c hat man die zusammengehörigen Werte $s = o$ und $x = o$, woraus sich ergiebt $x_c = o$, also ist, wenn noch, wie beim ersten Fall geschehen ist, $1 - b = -a$ gesetzt wird,

Gl. 6) $$x = -a \cdot s + \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}ps\right] \cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}ps\right]\right).$$

In diesen Gleichungen für y und x kommen die Grössen q und K vor, es ergiebt sich aber

Gl. A+] q aus einer Tabelle entsprechend k,

und dann ist

Gl. B+] $$K = \frac{\pi}{2}\left[1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots\right]^2.$$

Nun sollen aber noch zusammengehörig sein $s = o$ und $y = -\delta$, also ist nach Gleichung 5

$$\delta = 2\frac{k}{p}cn\,[o],$$

aber es ist $cn\,[o] = 1$, also ist $\delta = \frac{2k}{p}$;

Gl. C] $$k = \frac{p}{2}\delta.$$

Ferner sollen zusammengehörig sein $y = o$ und $s = l$, also ist nach Gleichung 5 $o = \frac{2k}{p}cn\,[pl]$, d. h. es ist $cn\,[pl] = o$; damit dies aber der Fall sei, muss sein

Gl. D] $$p \cdot l = K.$$

Mit Hülfe dieser vier Gleichungen A*, B*, C und D können, wenn z. B. p und l gegeben sind, der Reihe nach K, q, k und δ berechnet werden, oder wenn l und δ gegeben sind, so können k, q, K und p berechnet werden, oder endlich wenn p und $k = \sin\frac{\alpha}{2}$ gegeben sind, so können δ, q, K und l berechnet werden.

Sobald k bekannt ist, ist auch der Winkel α der Tangente im Lastangriffspunkt bekannt, denn es ist nach Definition $\alpha = 2\, arc \sin k$. Setzt man in Gleichung 6 für ps aus Gleichung D den Wert $pl = K$, so hat man als Abscisse des Lastangriffspunktes $x = -a \cdot l$.
$s = l$

Im Gegensatz zu dem ersten Falle besteht hier in den vier Gleichungen A*; B*; C und D kein formaler Grund, warum k nicht alle Werte annehmen sollte, welche $\sin \frac{\alpha}{2}$ annehmen kann, es kann also in diesem zweiten Falle k alle möglichen Werte annehmen zwischen o und 1.

Die Grenzfälle $k = 1$ und $k = 0$ sind aber für die Amplitudenfunktionen Fälle der Entartung, auf welche besonders eingegangen werden muss. Den Fall $k = 1$ zu untersuchen ist aus einem Grunde, der später ersichtlich wird, nicht nötig; bleibt also nur $k = 0$ zu untersuchen.

Aus Gleichung 1 auf Seite 31 ergab sich $\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = +2p^2 \cos\varphi + C_1$. Nun ist im vorliegenden speziellen Falle für $y = 0$ ausser $\frac{d\varphi}{ds} = 0$ auch $\varphi = \alpha = 0$, also ist $0 = 2p^2 + C_1$; $C_1 = -2p^2$, demnach ist

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 2p^2(\cos\varphi - 1); \quad \frac{d\varphi}{ds} = p\sqrt{2(\cos\varphi - 1)}; \quad d\varphi = \sqrt{2(\cos\varphi - 1)}\, p\, ds.$$

Soll nun $d\varphi$ nicht imaginär werden, so darf in keinem Querschnitte des Stabes $\cos\varphi$ kleiner als $+1$ werden; grösser als $+1$ kann $\cos\varphi$ aber auch nicht sein; also ist in jedem Querschnitte $\varphi = 0$, d. h. der Stab ist in seinem ganzen Verlaufe geradlinig, und zwar ist dies der Fall ganz unabhängig von der Grösse von p und l, sobald nur $\alpha = 0$ und damit $k = 0$ erfüllt ist.

Frägt man nun bei dem allgemeinen Falle $k > 0$, wann es eine Berührende an die elastische Linie giebt, welche zur Einspannung, oder was dasselbe ist, zur Kraft P normal ist, so hat man denjenigen Punkt aufzusuchen, für welchen $\frac{dy}{dx} = \infty$ ist.

Es ist nach Gleichung 5 $dy = -\frac{2k}{p}\, d(cn[ps])$, also ist

$$dy = -\frac{2k}{p}\{-sn[ps]\, dn[ps]\, p\, ds\}; \quad dy = +2k\, sn[ps]\, dn[ps]\, ds.$$

Auf Seite 32 aber findet sich $dx = (1 - 2k^2 sn^2[ps])\, ds$. Es ist somit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2k\, sn[ps] \cdot dn[ps]}{1 - 2k^2 sn^2[ps]}, \text{ und damit } \frac{dy}{dx} = \infty \text{ sei,}$$

$$\text{muss } sn^2[ps] = \frac{1}{2k^2}; \quad 2k^2 = \frac{1}{sn^2[ps]}; \quad k = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot sn[ps]} \text{ sein.}$$

Der grösste Wert, den $sn[ps]$ annehmen kann, ist aber 1, also ist der kleinste Wert von k, bei welchem eine zur Kraft P normale Berührende vorkommt, $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ist aber $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$, so ist $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, d. h. es ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$, und die normale Berührende ist gerade diejenige im Lastangriffspunkt.

Wenn aber $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, so ist nach Seite 19 $K = 1{,}854080$, also ist nach Seite 32 Gleichung D $p \cdot l = 1{,}854080$, d. h. die kleinste Stablänge, bei welcher eine zur Kraft P normale Berührende möglich ist, ist $l = \frac{1{,}854080}{p}$.

Da nun $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ der untere Grenzwert ist, bei dem der erste Fall der zur Kraft P normalen Einspannung gerade anfängt möglich zu sein, so folgt, dass die elastischen Linien des zweiten Falles, sobald $k = > \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, sich in den beim ersten Falle gefundenen Kurven der Figuren 9 und 10 und den aus diesen abgeleiteten folgenden Figuren wieder vorfinden müssen, wenn man je das Stück der Kurve nimmt, welches nach der dortigen Bezeichnung von x_{min} über $x = 0$ bis $x = x_a$ reicht, denn in x_{min} ist die Berührende parallel der Kraft P (Fig. 36).

Um formal die Übereinstimmung der Figur 35 mit dem erwähnten Stücke der Kurve in Figuren 9 und 10 darzustellen, hat man in den Gleichungen 5 und 6 des zweiten Falles, wie sich aus dem Vergleich der gewählten Koordinatensysteme ergiebt, α durch γ; x durch $y_H - y = y_c + as_c - y$; y durch $x - x_a$; s durch $s - s_c$; l durch $l - s_c$ zu ersetzen. Ist dies geschehen, so werden die genannten Gleichungen zu

$$x - x_a = -\frac{2k}{p} cn[p(s-s_c)]; \quad x_a - x = \frac{2k}{p} cn[p(s-s_c)], \text{ und}$$

$$y_c + as_c - y = -a(s-s_c) + \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}p(s-s_c)\right] \cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}p(s-s_c)\right]\right);$$

$$y = y_c + as - \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}p(s-s_c)\right] \cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}p(s-s_c)\right]\right),$$

in Übereinstimmung mit den Gleichungen 5 und 6 des ersten Falles. Diese Übereinstimmung ist in Figur 36 bildlich dargestellt.

Da für den Berührungspunkt der zur Kraft normalen Tangente nach Seite 33

$$sn^2[ps] = \frac{1}{2k^2} \text{ ist,}$$

und nach Gleichung 5

$$y = -2\frac{k}{p} cn[ps] = -2\frac{k}{p}\sqrt{1 - sn^2[ps]} \text{ ist, so ist}$$

$$y_n = -2\frac{k}{p}\sqrt{1 - \frac{1}{2k^2}}; \quad y_n = -\frac{2}{p}\sqrt{k^2 - \frac{1}{2}},$$

in Übereinstimmung mit dem Werte für x_a auf Seite 8. Setzt man den Absolutwert von y_n statt x_a in die Seite 8 gegebene Gleichung für l ein, so erhält man die Bogenlänge, um welche der Berührungspunkt dieser Tangente von dem Lastangriffspunkt zurückliegt.

Wenn $k < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, so sind keine elastische Linien des ersten Falles vorhanden, welche mit denen des zweiten Falles identisch sein könnten, dieser letztere muss somit für sich untersucht werden.

II. Teil.

Wenn in den Formeln

$$\sin\frac{\varphi}{2} = k\, sn[ps]; \quad \cos\frac{\varphi}{2} = dn[ps];$$

$$y = -\frac{2k}{p} cn[ps];$$

$$x = -as + \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}ps\right] \cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}ps\right]\right)$$

den Grössen k; K; p; l und damit auch der Grösse a die Bedeutung von Konstanten, der Grösse s aber die Bedeutung einer unabhängigen Variablen gegeben wird, so ist durch diese Formeln eine unbegrenzte Kurve festgelegt.

Da $y = -\frac{2k}{p} cn[ps]$ ist, so hat y sein Maximum resp. sein Minimum, wenn $cn[ps]$ sein Minimum resp. sein Maximum hat, also ist

$$y_{max} = +\frac{2k}{p}; \quad y_{min} = -\frac{2k}{p} \text{ entsprechend } cn[ps] = -1 \text{ resp. } cn[ps] = +1.$$

Nun ist $cn[ps] = +1$, wenn $ps = 4 \cdot n \cdot K$; $s = 4 \cdot n \cdot \frac{K}{p}$, wo $n = 0; 1; 2; 3$ etc. zu nehmen ist, und es ist $cn[ps] = -1$, wenn $ps = 4 \cdot n \cdot K + 2K$; $s = 2(2n+1)\frac{K}{p}$, wo $n = 0; 1; 2; 3$ etc. zu nehmen ist.

Man hat also die zusammengehörigen Werte

$$s = \quad 0 \quad 2\frac{K}{p} \quad 4\frac{K}{p} \quad 6\frac{K}{p} \quad 8\frac{K}{p} \quad 10\frac{K}{p} \quad 12\frac{K}{p}$$

$$y = -\frac{2k}{p} \quad +\frac{2k}{p} \quad -\frac{2k}{p} \quad +\frac{2k}{p} \quad -\frac{2k}{p} \quad +\frac{2k}{p} \quad -\frac{2k}{p}.$$

Ferner ist $y = 0$, wenn $cn\,[ps] = 0$ ist, dies ist aber der Fall, wenn $ps = (2n+1)K$; $s = (2n+1)\frac{K}{p}$, wo $n = 0;\ 1;\ 2;\ 3$ etc. zu nehmen ist.

Es sind also zusammengehörig

$$\begin{array}{lccccc} s = & \frac{K}{p} & 3\frac{K}{p} & 5\frac{K}{p} & 7\frac{K}{p} & 9\frac{K}{p} \\ y = & 0 & 0 & 0 & 0 & 0. \end{array}$$

Nun möge der Punkt $s = 2 \cdot n\frac{K}{p}$, für welchen nach obigem $y = \pm\frac{2k}{p}$ ist, herausgenommen werden; für denselben ist $x = -a \cdot 2n\frac{K}{p} + \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}2nK\right] \cdot f(\cdot\cdot\cdot\cdot)$, aber es ist $\sin[2n\pi] = 0$, also ist $x = -n \cdot 2a\frac{K}{p}$, und man hat die zusammengehörigen Werte

$$\begin{array}{lccccccc} s = & 0 & 2\frac{K}{p} & 4\frac{K}{p} & 6\frac{K}{p} & 8\frac{K}{p} & 10\frac{K}{p} & 12\frac{K}{p} \\ y = & -2\frac{k}{p} & +2\frac{k}{p} & -2\frac{k}{p} & +2\frac{k}{p} & -2\frac{k}{p} & +2\frac{k}{p} & -2\frac{k}{p} \\ x = & -0 & -2a\frac{K}{p} & -4a\frac{K}{p} & -6a\frac{K}{p} & -8a\frac{K}{p} & -10a\frac{K}{p} & -12a\frac{K}{p} \end{array}$$

Es ergiebt sich hieraus, dass parallel der Einspannung gemessen der Abstand zweier Minima resp. Maxima von y je die Grösse hat $-4a\frac{K}{p}$, und dass jedes Maximum von dem nächsten Minimum den Abstand hat $-2a\frac{K}{p}$.

Nun sollen für zwei Punkte

$$s_1 = 2n\frac{K}{p} - \Delta \text{ und } s_2 = 2n\frac{K}{p} + \Delta$$

die Koordinaten berechnet werden. Es ist

$$y_1 = -\frac{2k}{p}cn\,[2nK - p\Delta] = \begin{cases} -\frac{2k}{p}cn\,[-p\Delta] \text{ für } n \text{ gerade} \\ +\frac{2k}{p}cn\,[-p\Delta] \text{ für } n \text{ ungerade} \end{cases};$$

$$y_1 = \begin{cases} -\frac{2k}{p}cn\,[p\Delta] \text{ für } n \text{ gerade} \\ +\frac{2k}{p}cn\,[p\Delta] \text{ für } n \text{ ungerade} \end{cases};$$

$$y_2 = -\frac{2k}{p}cn\,[2nK + p\Delta] = \begin{cases} -\frac{2k}{p}cn\,[p\Delta] \text{ für } n \text{ gerade} \\ +\frac{2k}{p}cn\,[p\Delta] \text{ für } n \text{ ungerade} \end{cases};$$

also ist $y_1 = y_2$.

Die zugehörigen Abscissen sind

$$x_1 = -a\left(2n\frac{K}{p} - \Delta\right) + \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}2nK - \frac{\pi}{K}p\Delta\right] \cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}2nK - \frac{\pi}{K}p\Delta\right]\right)$$
$$= -n \cdot 2a\frac{K}{p} + a\Delta - \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}p\Delta\right] \cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}p\Delta\right]\right);$$

$$x_2 = -a\left(2n\frac{K}{p} + \Delta\right) + \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}2nK + \frac{\pi}{K}p\Delta\right] \cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}2nK + \frac{\pi}{K}p\Delta\right]\right)$$
$$= -n \cdot 2a\frac{K}{p} - a\Delta + \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}p\Delta\right] \cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}p\Delta\right]\right).$$

Hieraus folgt, dass die Normalen zur Einspannung, welche durch die Punkte $s = 2n\frac{K}{p}$ gehen, also die Abstände $-2a\frac{K}{p}$ haben, für den ganzen Verlauf der Kurve Symmetrieaxen sind.

Nun möge der Punkt $s = (2n+1)\frac{K}{p}$, für welchen nach früherem $y = 0$ ist, herausgenommen werden; für denselben ist

$$x = -a(2n+1)\frac{K}{p} + \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}(2n+1)K\right]\cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}(2n+1)K\right]\right),$$

es ist aber $\sin[(2n+1)\pi] = 0$, also ist $x = -(2n+1)a\frac{K}{p}$, und man hat die zusammengehörigen Werte

$s =$	$\frac{K}{p}$	$3\frac{K}{p}$	$5\frac{K}{p}$	$7\frac{K}{p}$	$9\frac{K}{p}$
$y =$	0	0	0	0	0
$x =$	$-a\frac{K}{p}$	$-3a\frac{K}{p}$	$-5a\frac{K}{p}$	$-7a\frac{K}{p}$	$-9a\frac{K}{p}$.

Da für diese Punkte $\frac{1}{\varrho} = -p^2 \cdot y = 0$ ist, so sind sie Wendepunkte. Die Wendepunkte folgen demnach parallel der Einspannung gemessen in Abständen von $-2a\frac{K}{p}$ aufeinander, und es befindet sich zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Wendepunkten in der Mitte ihres Abstandes abwechselnd ein Maximum oder ein Minimum für y.

Rechnet man für zwei Punkte $s_1 = (2n+1)\frac{K}{p} - \Delta$ und $s_2 = (2n+1)\frac{K}{p} + \Delta$ die Koordinaten, so findet man

$$y_1 = -\frac{2k}{p}cn[(2n+1)K - p\Delta] = -\frac{2k}{p}cn[K - \{p\Delta - 2nK\}];$$

$$y_2 = -\frac{2k}{p}cn[(2n+1)K + p\Delta] = -\frac{2k}{p}cn[K + \{p\Delta + 2nK\}]$$

$$= -\frac{2k}{p}cn[K + \{p\Delta + 2nK - 4nK\}] = -\frac{2k}{p}cn[K + \{p\Delta - 2nK\}].$$

Es ist aber $cn[K+v] = cn[-K-v] = -cn[-K-v+2K] = -cn[K-v]$, man hat also $y_2 = -y_1$.

Die zugehörigen Abscissen sind

$$x_1 = -(2n+1)a\frac{K}{p} - a\Delta + \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}(2n+1)K - \frac{\pi}{K}p\Delta\right]\cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}(2n+1)K - \frac{\pi}{K}p\Delta\right]\right);$$

$$x_1 = -(2n+1)a\frac{K}{p} - a\Delta + \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\pi - \frac{\pi}{K}p\Delta\right]\cdot f\left(\cos\left[\pi - \frac{\pi}{K}p\Delta\right]\right);$$

$$x_1 = -(2n+1)a\frac{K}{p} - a\Delta + \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}p\Delta\right]\cdot f\left(-\cos\left[\frac{\pi}{K}p\Delta\right]\right),$$

und daraus x_2 durch Vertauschung von Δ mit $(-\Delta)$

$$x_2 = -(2n+1)a\frac{K}{p} + a\Delta - \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}p\Delta\right]\cdot f\left(-\cos\left[\frac{\pi}{K}p\Delta\right]\right).$$

Hieraus folgt, dass jeder Wendepunkt $s = (2n+1)\frac{K}{p}$ ein Punkt diametraler Symmetrie für den ganzen Verlauf der Kurve ist.

Da $cn[ps] = cn[ps + 4K] = cn\left[p\left(s + \frac{4K}{p}\right)\right]$, so nimmt y denselben Wert wieder an, wenn s um $\frac{4K}{p}$ gewachsen ist.

Da ferner $\sin\left[\frac{\pi}{K}ps\right]$ und $\cos\left[\frac{\pi}{K}ps\right]$ gleich sind mit $\sin\left[\frac{\pi}{K}ps + 4\pi\right]$ resp. mit $\cos\left[\frac{\pi}{K}ps + 4\pi\right]$ d. h. mit $\sin\left[\frac{\pi}{K}p\left(s + 4\frac{K}{p}\right)\right]$ resp. $\cos\left[\frac{\pi}{K}p\left(s + 4\frac{K}{p}\right)\right]$, so ist

$$\text{für } s;\ x_{s'} = -as + F, \quad \text{für } s + \frac{4K}{p};\ x_{s''} = -as - 4\frac{aK}{p} + F = x_{s'} - 4\frac{aK}{p}.$$

Es besteht also die Kurve aus kongruenten Ästen, die in parallel der Einspannung gemessenen Abständen von $-4a\frac{K}{p}$ auf einander folgen. Aus dem, was über die Symmetrie gesagt worden ist, folgt noch, dass jeder Ast aus symmetrischen Halbästen und jeder dieser aus umgekehrt symmetrischen Viertelästen besteht.

Wenn a negativ sich ergiebt, so verläuft die Kurve als Ganzes für wachsende positive s von der Einspannungsstelle aus nach oben, für positive a verläuft sie aber als Ganzes nach unten.

Da aber $a = 0$ ist für $k = 0{,}90895$, und schon von $k = 0{,}70711$ an der zweite Fall im ersten Falle mit enthalten ist, so verlaufen alle elastischen Linien, welche nur dem zweiten Falle angehören, nach oben.

Eine solche elastische Linie ist in Figur 37 dargestellt.

Hätte man in Gleichung 2 die negative Wurzel genommen, so wäre formal der Erfolg gewesen, dass in allen Formeln p mit $(-p)$ vertauscht gewesen wäre. Es wäre also gewesen

Gl. III) $\sin\frac{\varphi}{2} = -k \cdot sn\,[ps]$ **Gl. IV)** $\cos\frac{\varphi}{2} = dn\,[ps]$

Gl. V) $$y = +2\frac{k}{p}cn\,[ps]$$

Gl. VI) $$x = -as + \frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}ps\right]\cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}ps\right]\right)$$

Es wäre aber hier k der Absolutwert von $\sin\frac{\alpha}{2}$ gewesen. Die so erhaltene Kurve ist der früheren in Bezug auf die Axe der Einspannung symmetrisch.

Die Figur 37 ist gezeichnet für den Fall $k < 0{,}70711$, es haben aber die Folgerungen, die aus ihr gezogen werden, für alle Werte von k Gültigkeit.

Berücksichtigt man, dass im unbegrenzten Verlauf der Kurve stets an jeder Stelle y der Krümmungsradius der Gleichung genügt $\frac{1}{\varrho} = -p^2 y$, so sieht man, dass beliebige Stücke der Kurve als elastische Linien gekrümmter Stäbe aufgefasst werden können, sofern eine Belastung des betreffenden Stabes möglich ist, bei der an jeder Stelle y das Moment $M_{ä}$ der äusseren Kräfte im Zustand des Gleichgewichtes den Wert hat $M_{ä} = \frac{EJ}{\varrho} = -EJp^2 y = -Py$.

Diese Bedingung ist z. B. jedesmal erfüllt, wenn bei Beibehaltung der gewählten Einspannung die Last P in einem der Wendepunkte angreift. Auf diese Weise sind aus Figur 37 die Figuren 38 und 39 entstanden.

Lässt man aber den Endpunkt des Stabes einen Kurvenpunkt einnehmen, der nicht ein Wendepunkt ist, so muss zu der Kraft P noch ein Endmoment hinzukommen von der Grösse $-Py_e$, wenn y_e die Ordinate des Stabendpunktes ist. Bei positivem y_e ist also das erforderliche Endmoment negativ, bei negativem y_e aber positiv. Elastische Linien für Belastungen dieser Art sind in Figuren 40 und 41 dargestellt.

Angenommen in den Figuren 38 bis 41 seien P; p und L von derselben Grösse, so ist

in Fig. 38a: $K = p \cdot L$, weil $L = \frac{K}{p}$ ist;

in Fig. 40: $K = p\frac{L}{2}$, weil $L = \frac{2K}{p}$ ist;

in Fig. 38b: $K = p\frac{L}{3}$, weil $L = \frac{3K}{p}$ ist;

in Fig. 41: $K = p\frac{L}{4}$, weil $L = \frac{4K}{p}$ ist;

in Fig. 39: $K = p\frac{L}{5}$, weil $L = \frac{5K}{p}$ ist.

Würde man in weiteren Figuren noch mehr Umläufe in die elastische Linie bei gleichbleibendem P; p und L einbeziehen, so würde der Wert von K ein immer kleinerer Bruchteil des

Produktes $p \cdot L$ sein. Es wird also K um so kleiner, je mehr Teile von Umläufen oder ganze Umläufe der angenommene Gleichgewichtsfall bei konstantem P; p und L enthalten soll.

Da K und k gleichzeitig wachsen und abnehmen, so wird k und mit ihm $\delta = \frac{2k}{p}$ durch Vermehrung der Anzahl der Umläufe verkleinert, durch Verminderung der Anzahl der Umläufe aber vergrössert.

Falls eine zu P normale Tangente vorhanden ist, so ist der Abstand ihres Berührungspunktes vom Wendepunkt $y_n = \mp \frac{2}{p} \sqrt{k^2 - \frac{1}{2}}$. Es nimmt also y_n bei wachsender Anzahl der Umläufe ab, bei abnehmender Anzahl der Umläufe wird y_n aber grösser.

Führt man z. B., wie in der Mitte der Figur 42 dargestellt, entsprechend der Figur 38a, den Lastangriffspunkt in den Wendepunkt, so hat man $K = pL$; aus K bekommt man einen gewissen Wert für k und aus k einen gewissen Wert für δ.

Führt man aber, wie in Figur 42 oben dargestellt ist, den Lastangriffspunkt nicht ganz bis zum Wendepunkt, so muss zu P ein positives Endmoment M hinzugefügt werden. Gegen die Figur in der Mitte ist die Anzahl der Umläufe vermindert, also ist $K_1 > K$; $k_1 > k$; $\delta_1 > \delta$.

Führt man anderseits den Lastangriffspunkt über den Wendepunkt hinüber, wie in Figur 42 unten dargestellt, so muss zu P ein negatives Endmoment M hinzugefügt werden. Gegen die Figur in der Mitte ist jetzt die Anzahl der Umläufe vermehrt, also ist $K_2 < K$; $k_2 < k$; $\delta_2 < \delta$.

Figur 43 ist auf demselben Wege aus Figur 38b entstanden. In den von oben nach unten aufeinanderfolgenden Darstellungen der Figur 43 nimmt die Anzahl der Umläufe zu, also nehmen K; k und δ von oben nach unten ab.

Wegen des auf Seite 37 Gesagten, giebt es zu jeder der Kurven der Figuren von Figur 35 an eine im Bezug auf die Axe der Einspannung symmetrische Figur.

Angenommen an dem Stabende greife nur die Last P an, ein Endmoment M könne nicht hergestellt werden. Es sei beabsichtigt, den Stab nach der elastischen Linie in der Mitte der Figur 42 einzustellen; es werde der Stab aber irrtümlich nach der oberen elastischen Linie eingestellt, dann fehlt von dem Augenblicke an, wo der Stab der Kraft P überlassen wird, das zu diesem Gleichgewicht erforderliche positive Endmoment M, dies hat zur Folge, dass über die ganze Länge des Stabes die äusseren Momente M_a kleiner sind als die der Krümmung entsprechenden inneren Momente M_i. Die inneren elastischen Kräfte des Stabes vermögen das Übermass der Krümmung rückgängig zu machen, der Stab streckt sich, bis P in dem Wendepunkt angelangt ist, womit sich der richtige Gleichgewichtszustand von selbst eingestellt hat.

Wird der Stab aber irrtümlich nach der unteren elastischen Linie der Figur 42 eingestellt, dann fehlt von dem Augenblicke an, wo der Stab der Kraft P überlassen wird, das zu diesem Gleichgewichte erforderliche negative Endmoment M; dies hat zur Folge, dass von $s = 0$ bis $s = \frac{K_2}{p}$ die positiven Momente zu gross, von $s = \frac{K_2}{p}$ bis $s = L$ die negativen Momente dem Absolutwerte nach nicht gross genug sind; es bekommt der Stab auf seiner ganzen Länge einen Zuwachs an positiver Krümmung, er wölbt sich stärker, bis P in dem Wendepunkt angelangt ist, womit sich der richtige Gleichgewichtszustand von selbst eingestellt hat.

Es ist also der Gleichgewichtszustand Figur 38a gegen kleine Fehler der Einstellung unempfindlich, er ist stabil. Dasselbe gilt natürlich von der bezüglich der Einspannungsaxe symmetrischen Gleichgewichtsfigur.

Ist es beabsichtigt, den Stab nach der elastischen Linie in der Mitte der Figur 43 einzustellen, wird er aber irrtümlich nach der oberen elastischen Linie eingestellt, dann fehlt von dem Augenblicke an, wo der Stab der Kraft P überlassen wird, das zu diesem Gleichgewichte erforderliche negative Endmoment M; dies hat zur Folge, dass von $s = \frac{K_1}{p}$ bis $s = L$ die negativen Momente nicht gross genug, von $s = 0$ bis $s = \frac{K_1}{p}$ aber die positiven Momente zu gross sind. Von $s = \frac{K_1}{p}$ bis $s = L$ streckt sich zwar der Stab, von $s = 0$ bis $s = \frac{K_1}{p}$ wölbt er sich aber stärker in positiver Krümmung.

Nun ist aber in der elastischen Linie in der Mitte die positive Krümmung geringer als in der oberen; weil also der Teil dieser von $s = 0$ bis $s = \frac{K_1}{p}$ wegen des Fehlens von M sich noch stärker krümmt als in der oberen Figur, so kann sich die richtige Gleichgewichtsfigur nicht von selbst einstellen.

Wird der Stab irrtümlich nach der unteren elastischen Linie der Figur 43 eingestellt, dann fehlt von dem Augenblicke an, wo der Stab der Kraft P überlassen wird, das zu diesem Gleichgewichte erforderliche positive Endmoment M; dies hat zur Folge, dass von $s = \frac{K_2}{p}$ bis $s = \frac{3 K_2}{p}$ die negativen Momente zu gross, dass aber von $s = 0$ bis $s = \frac{K_2}{p}$ und von $s = \frac{3 K_2}{p}$ bis $s = L$ die positiven Momente nicht gross genug sind. Infolge des Überschusses der Momente im negativen Biegungssinne wölbt sich zwar der Stab stärker in negativer Krümmung von $s = \frac{K_2}{p}$ bis $s = L$, in dem übrigen Teile aber streckt er sich. In diesem letzteren Teile ist aber die untere elastische Linie schon schwächer gekrümmt als diejenige in der Mitte; weil sich also dieser Teil wegen des Fehlens von M noch schwächer krümmt als in der unteren elastischen Linie, so ist der Übergang in die richtige Gleichgewichtsfigur nicht mehr möglich.

Es ist der Gleichgewichtszustand nach Figur 38b gegen kleine Fehler des Einstellens empfindlich, er ist labil.

Dasselbe gilt natürlich von der inbezug auf die Einspannungsaxe symmetrischen Gleichgewichtsfigur.

Bei irrtümlicher Einstellung nach der oberen Figur 43 fällt der Stab in schlängelnder Bewegung nach rechts um; bei irrtümlicher Einstellung nach der unteren Figur 43 fällt er in ebensolcher Bewegung nach links um, bis er rechts den der Figur 38a entsprechenden stabilen Gleichgewichtszustand, links den ihm symmetrischen erreicht hat.

Die an diesen Beispielen gefundenen Resultate lassen sich in allgemeiner Form, wie folgt, ausdrücken:

Ist das eine Ende des Stabes eingespannt, das andere Ende frei und belastet mit einer zur Einspannung parallelen Einzelkraft, so sind diejenigen gekrümmten Gleichgewichtslagen stabil, deren elastische Linien nur einerlei Krümmung haben, diejenigen Gleichgewichtslagen aber, deren elastische Linien zweierlei Krümmung haben, sind labil.

Bei dem wie angegeben belasteten und gestützten Stabe giebt es aber ausser den gekrümmten Gleichgewichtsfiguren ohne irgend welche beschränkende Bedingungen, also stets, die geradlinige Gleichgewichtsfigur, welche Seite 33 abgeleitet worden ist. Die Untersuchung der Stabilität dieses geradlinigen Gleichgewichtszustandes hat auf andere Art zu geschehen, und ergiebt sich die Bedingung der Stabilität erst durch Benützung nachfolgender in anderem Zusammenhang gemachten Überlegungen.

Der kleinste Wert, den k annehmen kann, ist $k = 0$, und da allgemein

$$K = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \ldots\ldots\ldots + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots 2n}\right)^2 \cdot k^{2n} + \ldots\ldots\right]$$

ist, so ist der kleinste Wert, den K annehmen kann $K = \frac{\pi}{2}$.

Hieraus und aus dem Seite 37 Gesagten folgt, dass ein Gleichgewicht nur möglich ist

nach Figur 38a, wenn $L => \frac{1}{2}\frac{\pi}{p}$;

nach Figur 40, wenn $L => \frac{2}{2}\frac{\pi}{p} = \frac{\pi}{p}$;

nach Figur 38b, wenn $L => \frac{3}{2}\frac{\pi}{p}$;

nach Figur 41, wenn $L => \frac{4}{2}\frac{\pi}{p} = 2\frac{\pi}{p}$;

nach Figur 39, wenn $L => \frac{5}{2}\frac{\pi}{p}$.

Je mehr Umläufe verlangt werden, ein um so grösseres Vielfache von $\frac{1}{2}\frac{\pi}{p}$ muss L mindestens sein.

In Figur 44 sind drei Gleichgewichtslagen dargestellt; die Lage I ist die immer mögliche geradlinige Gleichgewichtsfigur; die Lage II entspricht der Figur 38a; die Lage III ist die zu ihr symmetrische Gleichgewichtsfigur.

Die Gleichgewichtsfiguren II und III sind stabil, damit sie aber möglich seien, muss $L > \frac{1}{2}\frac{\pi}{p}$ sein. Angenommen dies sei der Fall, dann ist Gleichgewichtsfigur I labil. Denn wenn der Stab noch so wenig aus der geraden Linie ausgebogen wird, so muss er in die Lage II oder III umfallen, weil erst wieder bei demjenigen $\delta = \frac{2k}{p}$, welches dem $K = pL$ entspricht, die inneren elastischen Kräfte mit den äusseren Kräften ins Gleichgewicht gelangen; bei jedem kleineren δ sind die erzeugten inneren Kräfte zu schwach, das Gleichgewicht herzustellen, sie sind also erst recht zu schwach, den Stab mit seiner Last nach der geraden Gleichgewichtsfigur zurück zu beschleunigen.

Wenn also $L > \frac{1}{2}\frac{\pi}{p}$ ist, so hat ein kleiner Fehler in der Einstellung der geradlinigen Gleichgewichtslage I ein »Umfallen« zur Folge; der Stab geht sei es in die Gleichgewichtslage II, sei es in die Gleichgewichtslage III über, welche stabil sind.

Wenn aber $L <= \frac{1}{2}\frac{\pi}{p}$ ist, und der Stab wird noch so weit aus der geraden Linie ausgebogen, so muss er in die geradlinige Figur zurückkehren, denn es giebt kein δ, bei dem Gleichgewicht möglich wäre; bei einem noch so kleinen δ sind die äusseren Kräfte im Vergleich zu den erzeugten inneren elastischen Kräften zu schwach, ein Gleichgewicht herzustellen, die inneren Kräfte beschleunigen den Stab mit seiner Last immer wieder nach der geradlinigen Gleichgewichtsfigur zurück.

Wenn also $L <= \frac{1}{2}\frac{\pi}{p}$ ist, so ist die geradlinige Gleichgewichtsfigur I gegen kleine Fehler des Einstellens unempfindlich, sie ist stabil und einzig möglich.

Die Bedingung $L <= \frac{1}{2}\frac{\pi}{p}$ kann auch geschrieben werden

$$p <= \frac{1}{2}\frac{\pi}{L}; \quad p^2 <= \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{L^2}; \quad P <= \frac{1}{4}\frac{\pi^2 EJ}{L^2};$$

$$P <= \frac{\pi^2 EJ}{L^2} 0{,}25.$$

So lange diese Bedingung erfüllt ist, so lange giebt es nur eine Gleichgewichtsfigur, die natürliche geradlinige Gleichgewichtsfigur I. Ist diese Bedingung aber nicht erfüllt, so giebt es drei Gleichgewichtsfiguren, deren die geradlinige Figur I derart labil ist, dass der Stab in eine der zwei symmetrischen Gleichgewichtsfiguren II und III umfällt.

Bis hierher ist vorausgesetzt worden, dass der Stab an seinem einen Ende fest eingespannt war, an seinem anderen Ende aber frei war. Aus Figur 41 können aber Aufschlüsse gefunden werden für den Fall, dass das eine Ende des Stabes wie bisher fest eingespannt ist, das andere Ende in der Verlängerung der Einspannungsaxe aber etwa in einer festen Röhre geführt ist. Die Röhre ist so fest gedacht, dass sie jedes Moment $P \cdot \delta$ auszuüben im Stande ist. Dieser Stützung des Stabes entspricht die Figur 45.

Ist H der in der Einspannungsaxe gemessene Abstand des inneren Endes der Röhre von der Einspannungsstelle, so ergiebt sich aus Figur 45, dass dem Absolutwert nach $H = 4 \left| a\frac{K}{p} \right|$ ist. Da aber der kleinste Wert von K, bei dem es noch eine Ausbiegung δ giebt, $K = \frac{\pi}{2}$ ist, und da aus Gleichung B* Seite 32 für $K = \frac{\pi}{2}$ sich $q = 0$ ergiebt, woraus aus der Gleichung auf Seite 5 folgt, dass das entsprechende $a = -1$ ist, so muss, damit der Stab in Figur 45 die Gleichgewichtsfiguren II oder III annehmen könne, $H => 4\frac{\pi}{2p}$; $H => \frac{2\pi}{p}$ sein.

Vorausgesetzt, dass diese Bedingung erfüllt ist, dann muss noch der Stab, damit er nicht aus der Röhre herausrutsche und so die Stützung ändere, eine solche Länge L haben, dass $L > 4\frac{K}{p}$.

Da a und K ein für alle Male mit einander in einer gewissen Beziehung durch Vermittlung von q stehen, so kann man aus der Gleichung $H = 4\left(-a\frac{K}{p}\right)$ rechnen $K = f(p \cdot H)$.

Kennt man K, dann kann man kontrollieren, ob $L > 4\frac{K}{p}$ erfüllt ist. Wenn dies der Fall ist, dann ist $\delta = \frac{2k}{p}$, wo k die zu dem gerechneten K gehörige Grösse hat.

Wenn sich hierbei $k > \frac{1}{\sqrt{2}}$ ergiebt, so sind die entsprechenden elastischen Linien in den Kurven des ersten Falles enthalten. Kann sich der Stab nicht durchdringen, dann hören die Bedingungen der Aufgabe auf erfüllt zu sein, sobald der gebogene Stab sich selbst berührt; dies ist aber nach Figur 11, welche mit der Lage II in Figur 45 übereinstimmt, der Fall, wenn $a = -\frac{p}{K} y_a$ sich ergiebt. Es ist also bei Figur 45 auf alle Fälle a immer negativ.

Die geradlinige Gleichgewichtslage I der Figur 45 ist natürlich immer möglich. Angenommen es sei $H > \frac{2\pi}{p}$, dann ist Gleichgewichtsfigur I labil. Denn wenn der Stab noch so wenig aus der geraden Linie ausgebogen wird, so muss er in die Lagen II oder III »ausknicken«, weil erst wieder bei derjenigen Ausbiegung $2\delta = \frac{4k}{p}$, welche dem $aK = -\frac{p \cdot H}{4}$ entspricht, die inneren elastischen Kräfte mit den äusseren Kräften ins Gleichgewicht gelangen. Bei jedem kleineren Pfeile sind die erzeugten inneren Kräfte zu schwach das Gleichgewicht herzustellen, sie sind also umsomehr zu schwach, den Stab mit der Last nach der geraden Gleichgewichtsfigur zurückzubeschleunigen.

Die Gleichgewichtslagen II und III sind aber stabil, denn wenn der Pfeil verringert wird, so überwiegen die äusseren Kräfte und beschleunigen den Stab in die Gleichgewichtslage II oder III zurück, wenn aber der Pfeil vergrössert wird, so überwiegen die inneren Kräfte und beschleunigen ihrerseits den Stab in die betreffende Gleichgewichtslage zurück.

Wenn also $H > 2\frac{\pi}{p}$ ist, dann hat ein kleiner Fehler in der Einstellung der geradlinigen Gleichgewichtslage I ein »Ausknicken« zur Folge; der Stab geht sei es in die Gleichgewichtslage II, sei es in die Gleichgewichtslage III über, welche stabil sind.

Ist zwar $H > 2\frac{\pi}{p}$ aber $L < 4\frac{K}{p}$, dann hat ein kleiner Fehler in der Einstellung der geradlinigen Gleichgewichtslage I der Figur 45 ein »Umfallen« zur Folge; der Stab rutscht aus der Führung heraus und geht in die Gleichgewichtslagen II oder III der Figur 44 über.

Wenn $H <= 2\frac{\pi}{p}$ ist, und der Stab wird, sofern er noch in der Führung bleibt, noch so weit aus der geraden Linie ausgebogen, so muss er in die geradlinige Figur zurückkehren, denn es giebt kein δ, bei dem Gleichgewicht möglich wäre; bei einem noch so kleinen Pfeil 2δ sind die äusseren Kräfte im Vergleich zu den erzeugten inneren Kräften zu schwach ein Gleichgewicht herzustellen; die inneren Kräfte beschleunigen den Stab mit seiner Last immer wieder nach der geradlinigen Gleichgewichtsfigur zurück.

Wenn demnach $H <= 2\frac{\pi}{p}$ ist, so ist die geradlinige Gleichgewichtsfigur I gegen kleine Fehler des Einstellens unempfindlich, sie ist stabil und die einzig mögliche.

Die Bedingung $H <= 2\frac{\pi}{p}$ kann auch geschrieben werden

$$p <= \frac{2\pi}{H}; \quad p^2 <= \frac{4\pi^2}{H^2}; \quad P <= 4\frac{\pi^2 EJ}{H^2};$$

$$P <= \frac{\pi^2 EJ}{H^2} 4.$$

So lange diese Bedingung erfüllt ist, so lange giebt es bei der Stützung nach Figur 45 nur eine Gleichgewichtslage, die geradlinige Gleichgewichtsfigur I. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so giebt es drei Gleichgewichtsfiguren, deren die geradlinige Figur I derart labil ist, dass der Stab in eine der zwei symmetrischen Gleichgewichtsfiguren II und III »ausknickt«, vorausgesetzt, dass die Stablänge L nicht so klein ist, dass der Stab die Führung verlässt und dann in die Gleichgewichtsfigur II oder III der Figur 44 »umfällt«.

Nimmt man aus der allgemeinen Kurve Figur 37 ein von zwei beliebigen Wendepunkten begrenztes Stück der Kurve heraus, so hat man die richtige elastische Linie eines Stabes, an dessen beiden freien Enden zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte P in einer und derselben Wirkungslinie angreifen. Für zwei unmittelbar aufeinander folgende Wendepunkte ist diese Belastung in Figur 46 dargestellt.

Ausser der Gleichgewichtsfigur II giebt es noch die zu ihr symmetrische Figur III und, wie immer, die geradlinige Figur I.

Aus Figur 46 ergiebt sich, dass $L = \frac{2K}{p}$ ist, also hat man sofort $K = \frac{1}{2} pL$, welchem K bestimmte Werte von k und q entsprechen; aus diesen ergiebt sich der zugehörige Wert von a und δ.

Der Pfeil der elastischen Linie ist dann $\delta = \frac{2k}{p}$, und die Sehne ist $\left| 2a\frac{K}{p} \right|_{\text{absolut}} = \left| aL \right|_{\text{absolut}}$.

Da der kleinste Wert von K, bei dem es noch eine Ausbiegung δ giebt, $K = \frac{\pi}{2}$ ist, so muss, damit die Gleichgewichtslage II resp. III möglich sei, $L => \frac{\pi}{p}$ sein. Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, dann ist die geradlinige Gleichgewichtsfigur I allein möglich.

Wenn $L <= \frac{\pi}{p}$ ist, so ist $p <= \frac{\pi}{L}$; $p^2 <= \frac{\pi^2}{L^2}$;

$$P <= \frac{\pi^2 EJ}{L^2}.$$

Solange diese Bedingung erfüllt ist, solange giebt es bei der Belastung nach Figur 46 nur eine Gleichgewichtslage, die geradlinige Gleichgewichtsfigur I. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so giebt es drei Gleichgewichtsfiguren, deren die gerade Gleichgewichtsfigur I derart labil ist, dass der Stab in eine der zwei symmetrischen Gleichgewichtsfiguren II und III »ausknickt«.

Allgemein ist bei diesem Falle der Figur 46 $L = \frac{2K}{p}$. Nun fängt nach Seite 33 eine zur Kraft P normale Tangente eben an möglich zu sein, wenn $K = 1{,}854080$ ist, und zwar ist diese Tangente für diesen Wert von K diejenige im Lastangriffspunkt. Also muss, damit in Figur 46 zur Kraft normale Tangenten vorhanden sind, $L => \frac{2 \cdot 1{,}854080}{p}$ sein. Hiermit findet die Bemerkung auf Seite 26 ihre Erledigung.

Sobald aber zur Kraft normale Tangenten vorhanden sind, ist man wieder auf die Kurven des ersten Falles zurückgeführt, denn man erhält die der elastischen Linie Figur 46 entsprechenden Kurven, wenn man in den Figuren des ersten Falles das Stück von dem Wendepunkte $s = l$ bis zum Wendepunkte $s = \frac{2K}{p} + l$ nimmt.

Das entsprechende Stück aus Figur 14 giebt die der Figur 46 entsprechende elastische Linie, deren Enden zu der Kraft normal stehen.

Das entsprechende Stück aus den Figuren 9 und 11 giebt die elastische Linie, deren Enden sich zunehmend gegeneinander neigen.

Das entsprechende Stück aus der Figur 12 giebt die elastische Linie, deren Enden zusammentreffen.

Das entsprechende Stück aus den Figuren 13 und 10 giebt die elastische Linie, deren Enden, nachdem der Stab, falls dies möglich ist, sich durchdrungen hat, sich wieder von einander wegneigen.

Welche von diesen elastischen Linien bei konstantem L, E und $\mathcal{J}$ die zutreffende ist, hängt von der Grösse der Kräfte P ab. Denn aus $L = \frac{2K}{p}$ ergiebt sich $p = \frac{2K}{L}$; $p^2 = \frac{4K^2}{L^2}$;

$$P = 4\frac{K^2 EJ}{L^2}.$$

Je nach der Gestalt der elastischen Linie, die man erhalten will, wählt man das K, und dann hat man aus obiger Gleichung den Wert von P, der zu der betreffenden elastischen Linie gehört.

Beispiele für die Berechnung der Durchbiegung der Enden eines nach Figur 46 belasteten Stabes.

Es möge, wie oben angegeben, der für die Gestalt der elastischen Linie in erster Reihe massgebende Wert K gewählt werden, es soll aber hier die Rechnung nicht bis auf P geführt werden, sondern nur bis auf p. Die Auflösung von p in P und $\mathfrak{J}$ hat dann in jedem besonderen Fall so zu geschehen, dass die Elasticitätsgrenze nirgends überschritten wird.

Aus $p = \frac{2K}{L}$ erhält man, wenn $L = 1$ genommen wird, $p = 2K$. Unter dieser Annahme sind die folgenden Beispiele gerechnet.

Wenn $K = \frac{\pi}{2} = 1{,}57080$ gewählt wird, so ist $p = 2K = \pi = 3{,}14159$, und da diesem K die Werte $k = 0$; $q = 0$; $a = -1$ entsprechen, so hat die zugehörige elastische Linie den Pfeil $\delta = \frac{2k}{p} = 0$; die Sehne $S = |a\ L| = 1$.

Wenn $K = 1{,}62001$ gewählt wird, so ist $p = 2K = 3{,}24002$, und da diesem K die Werte $k = 0{,}34202$; $q = 0{,}00777$ entsprechen, so findet man durch Benützung der Formel für a auf Seite 5, dass $a = -0{,}88116$ ist, und hat dann den Pfeil $\delta = \frac{2k}{p} = \frac{2k}{2K} = \frac{k}{K} = 0{,}21112$; die Sehne $S = |a \cdot L| = 0{,}88116$; die Neigung der Endtangente gegen die Kraftrichtung $\alpha = 2\,arc\sin k = 40°$.

Wenn $K = 1{,}85408$ gewählt wird, so ist $p = 2K = 3{,}70816$, und da diesem K nach Seite 19 die Werte entsprechen $k = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}70711$; $q = 0{,}04322$; $a = 0{,}45695$, so ist der Pfeil

$$\delta = \frac{2k}{p} = \frac{2k}{2K} = \frac{k}{K} = 0{,}38140;$$

die Sehne $S = |a \cdot L| = 0{,}45695$; die Endneigung $\alpha = 2 \cdot arc\sin k = 90°$.

Wenn $K = 2{,}32144$ gewählt wird, so ist $p = 2K = 4{,}64288$, und da diesem K nach Seite 14 die Werte entsprechen $k = 0{,}90895$; $q = 0{,}10770$; $a = 0$, so ist der Pfeil

$$\delta = \frac{2k}{p} = \frac{2k}{2K} = \frac{k}{K} = 0{,}39155;$$

die Sehne $S = a\,L = 0$; die Endneigung $\alpha = 2\,arc\sin k = 130°\,43{,}2'$; die Ordinate des Berührungspunktes der zur Kraft normalen Tangente $y_n = \left| -\frac{2}{p}\sqrt{k^2 - \frac{1}{2}} \right| = 0{,}24603$.

Wenn $K = 3{,}15327$ gewählt wird, so ist $p = 2K = 6{,}30654$, und da diesem K die Werte $k = 0{,}98481$; $q = 0{,}20661$ entsprechen, so findet man durch Benützung der Formel für a auf Seite 5, dass $a = 0{,}34048$ ist, und hat dann den Pfeil

$$\delta = \frac{2k}{p} = \frac{2k}{2K} = \frac{k}{K} = 0{,}31231;$$

die Sehne $S = a \cdot L = 0{,}34048$; die Endneigung $\alpha = 2\,arc\sin k = 160°$; den Abstand der normalen Tangente $y_n = \left| -\frac{2}{p}\sqrt{k^2 - \frac{1}{2}} \right| = 0{,}21738$.

Wählt man endlich $K = \infty$, so ist $p = \infty$ und $k = 1$, also hat man den Seite 10 besprochenen Fall der Entartung, welchem Figur 15 entspricht, nur sind hier die beiden Äste geradlinig gesteckt, und die Schleife ist unendlich klein geworden.

Diese sechs Beispiele sind in Figur 47 zur Darstellung gebracht.

Um einen Überblick über die Veränderlichkeit von α, δ und S mit P zu erhalten, hat man in Figur 47a als Abscissen die Werte der diesen Beispielen entsprechenden $p^2 = \frac{P}{EJ}$ und als Ordinaten

die zugehörigen Werte von α, δ und S aufgetragen, und zwar sind δ und S in demselben Masstabe gezeichnet.

Gemäss ihrer Entstehung gelten diese Kurven der Figur 47a zunächst nur für $L = 1$. Ist aber L nicht gleich 1, dann ist $2K = pL$, und in den Beispielen ist überall der benützte Zahlenwert für p jetzt der Wert des Produktes $p \cdot L$, so dass die erhaltenen Zahlenwerte für δ und S jetzt die Verhältnisse $\frac{\delta}{L}$ und $\frac{S}{L}$ darstellen.

Nimmt man also zur Abscisse die Werte $p^2 L^2 = \frac{P}{EJ} L^2$, so stellt die eine Kurve die α dar, die beiden anderen aber die Verhältnisse $\frac{\delta}{L}$ und $\frac{S}{L}$.

Das beim Belastungsfall der Figur 46 vorkommende Maximalmoment hat die Grösse

$$M_{max} = P\delta = P\frac{2k}{p} = \frac{2kP}{\sqrt{\frac{P}{EJ}}}; \quad M_{max} = 2k\sqrt{\frac{P^2 EJ}{P}} = 2k\sqrt{PEJ}, \text{ und es ist } \sigma_{max} = \pm\frac{M_{max}}{J} \cdot e,$$

wenn e der Abstand der äussersten Fasern von der neutralen Axe ist. Demnach ist

$$\sigma_{max} = \pm 2ke\sqrt{\frac{PEJ}{J^2}}; \quad \sigma_{max} = \pm 2ek\sqrt{\frac{P \cdot E}{J}}.$$

Diese selbe Grösse hat übrigens σ_{max} in jedem aus der allgemeinen Kurve der Figur 37 abgeleiteten richtigen Gleichgewichtszustand.

Der grösste Wert, den k annehmen kann, ist 1, wenn aber $k = 1$ ist, so ist nach Seite 10 entweder $J = 0$ oder $P = \infty$.

Die von der reinen Biegung hervorgerufene Spannung kann also bei endlichem e, E und J niemals unendlich gross werden, wenn nicht P selbst unendlich gross wird.

In dem letzten Gleichgewichtszustand der Figur 47, welcher den unendlich kleinen Knoten in der Mitte hat, ist das Maximalmoment $M_{max} = P \cdot \delta$ von der Form $\infty \cdot 0$, setzt man aber die Werte ein, so hat man $M_{max} = 2k\frac{\infty}{\sqrt{\infty}}\sqrt{EJ} = \sqrt{\infty} = \infty$.

Im Bereich der unendlich kleinen Schleife ist also die Beanspruchung unendlich gross, was sich auch aus $\frac{1}{\rho} = \frac{M_{\ddot{a}}}{EJ}$ ergiebt, weil $\rho = 0$ ist.

Es war allgemein der Absolutwert der grössten Biegungsspannung $\sigma_{max} = 2ek\sqrt{\frac{P \cdot E}{J}}$, oder, wenn $2 \cdot e = h =$ der Querschnittshöhe gesetzt wird,

$$\sigma_{max} = h \cdot k \cdot \sqrt{\frac{P \cdot E}{J}}; \quad \sigma^2 = h^2 k^2 \frac{P \cdot E}{J}; \quad \sigma^2 \frac{L^2}{E^2} = h^2 k^2 \frac{P}{EJ} L^2;$$

$$\sigma^2 \frac{L^2}{E^2} = h^2 k^2 p^2 L^2; \quad \sigma^2 \frac{L^2}{E^2} = h^2 k^2 (2K)^2; \quad \frac{\sigma}{\frac{h}{L} E} = k(2K).$$

Mit Hülfe dieser Gleichung kann in den bisherigen Beispielen zu den einzelnen Werten von $\frac{P}{EJ} L^2$ das Verhältnis $\sigma_{max} : \frac{h}{L} E$ berechnet werden; dies ist geschehen, und in Figur 47b sind die betreffenden Werte zu einer Kurve verbunden worden. Dass diese Kurve der $\sigma_{max} : \frac{h}{L} E$ jenseits von $\frac{P}{EJ} L^2 = 39{,}772$ annähernd geradlinig ansteigt, erklärt sich daraus, dass in Figur 47a jenseits von 39,772 der Wert von δ nur sehr langsam abnimmt, so dass $M_{\ddot{a}} = P \cdot \delta$, also auch σ_{max}, annähernd proportional mit P wächst.

Sollen nun bei einem Stabe aus Schweisseisen, für welchen z. B. $\frac{P}{EJ} L^2 = 39{,}772$ ist, in der zugehörigen Gleichgewichtslage nach Figur 46, die Voraussetzungen, unter welchen alle Resultate nur giltig sind, erfüllt bleiben, so darf das entsprechende σ_{max} die Elektrizitätsgrenze 1600 kg/cm² nicht überschreiten. Nun ist bei $\frac{P}{EJ} \cdot L^2 = 39{,}772$ in dem Beispiel gefunden worden $2K = 6{,}30654$;

$k = 0{,}98481$, also ist $\frac{\sigma}{\frac{h}{L}E} = 6{,}210744$; $\sigma = \left(\frac{h}{L}\right) 6{,}210744 \cdot 2000000$; $\sigma = \left(\frac{h}{L}\right) \cdot 12\,421\,488$, es muss also sein $\left(\frac{h}{L}\right) <= \frac{1600}{12\,421\,488}$; $\frac{h}{L} <= \frac{1}{7763{,}4}$, d. h. ein 1 cm hoher Stab müsste mindestens 77,634 m lang sein. Solche Verhältnisse lassen sich natürlich niemals verwirklichen, ganz abgesehen davon, dass in solchen Fällen der Einfluss des Eigengewichtes denjenigen der Belastung bei weitem überragen würde, falls der Stab nicht auf einer vollkommen glatten horizontalen Unterlage seiner ganzen Länge nach aufsässe.

Was hier von den Spannungen gesagt worden ist, bezieht sich auf die reine Biegungsspannung; in Wirklichkeit kommt die Normalspannung der Normalkraft noch hinzu. In dem Querschnitte, in welchem durch die Biegung σ_{max} erzeugt wird, ist die zusätzliche Spannung $\frac{P}{F}$, so dass alle Ordinaten der Figur 47b um den Betrag $\frac{P}{\frac{h}{L}EF}$ zu vergrössern sind.

Beispiel für die Anwendung der Figuren 47a und 47b.

Man habe einen schweisseisernen Rundstab von 1 cm Durchmesser, seine Länge sei $L = 1000$ cm, seine Querschnittshöhe ist $h = 1$ cm, also ist $\frac{h}{L} = \frac{1}{1000}$. Soll nun das Maximum der Biegungsspannung 1500 kg/cm² sein, so hat man

$$\frac{\sigma}{\frac{h}{L} \cdot E} = \frac{1500}{2000} = \frac{3}{4}.$$

Sucht man in Figur 47b denjenigen Wert von $\frac{P}{EJ} L^2$, der zu $\frac{\sigma}{\frac{h}{L}E} = \frac{3}{4}$ gehört, so findet man $\frac{P}{EJ} L^2 = 10{,}2$.

Da $\mathcal{J} = 0{,}0491$ cm⁴ ist, so ist $P = 10{,}2 \cdot \frac{0{,}0491 \cdot 2000000}{1000000}$; $P = 1$ kg.

Aus Figur 47a findet man ferner, dass zu $\frac{P}{EJ} L^2 = 10{,}2$ gehört $\frac{\delta}{L} = 0{,}147$; $\frac{S}{L} = 0{,}92$, also ist $\delta = 147$ cm und $S = 920$ cm.

Geht demnach der Stab unter Einwirkung der beiden ursprünglich axialen Kräfte $P = 1$ kg aus der labilen geradlinigen Gleichgewichtsfigur heraus, so ist er in der krummlinigen stabilen Gleichgewichtsfigur immer noch tragfähig, eine andere Frage ist aber, ob der Stab mit dem Pfeile $\delta = 147$ cm und der Sehne $S = 920$ cm den Zweck, zu welchem die Lasten zu tragen sind, noch erfüllt.

Zu der Biegungsspannung ist noch die Spannung durch die Normalkraft hinzuzufügen; es ist

$$\frac{P}{F} = \frac{1}{0{,}7854} = 1{,}27 \text{ kg}.$$

Man sieht, dass die von der Normalkraft herrührende Spannung in diesem Zusammenhange von ganz untergeordneter Bedeutung ist.

Der parallel zur Einspannung belastete Stab mit Berücksichtigung der drei deformierenden Kraftwirkungen.

In der Einleitung zur vorliegenden Arbeit ist gesagt worden, dass die Reduktion der äusseren Kräfte auf den Schwerpunkt irgend eines Querschnittes im Allgemeinen ein Moment, eine Normalkraft (nach der Richtung der Tangente) und eine Querkraft (nach der Normalen zur Tangente) giebt. Bis hierher ist aber nur das Moment berücksichtigt worden, weil thatsächlich die reine Biegung für die Deformation ausschlaggebend ist.

Im Folgenden soll nun zur Vervollständigung der Versuch gemacht werden, alle Reduktionselemente zu berücksichtigen, und zwar für die Belastung nach dem zweiten Falle, weil in diesem auch der erste Fall mit enthalten ist.

Mit dem in Figur 35 angenommenen Koordinatensystem hat man (vergl. Fig. 48) das Moment $M = -P \cdot y$; die Normalkraft $N = -P \cdot \cos\varphi$; die Querkraft $Q = +P \cdot \sin\varphi$.

Vor Allem muss nun der Kontingenzwinkel ermittelt werden, dies ist der Winkel, den zwei aufeinanderfolgende Bogenelemente der Stabaxe oder, was dasselbe ist, den zwei aufeinanderfolgende Stabquerschnitte mit einander bilden.

Es möge zuest der Einfluss von M und N auf diesen Kontingenzwinkel ermittelt werden.

War der Abstand zweier aufeinanderfolgender Querschnitte im ursprünglichen geraden Stabe ds, so wird dieser Abstand durch die mit der Deformation verbundene relative Bewegung des zweiten Querschnittes derart verändert, dass er in der äussersten Zugfaser die Grösse hat $(1+\varepsilon_1)\,ds$, in der axialen Faser die Grösse hat $(1+\varepsilon_0)\,ds$, in der äussersten Druckfaser die Grösse hat $(1+\varepsilon_2)\,ds$, dabei wird die übliche Voraussetzung gemacht, dass die Querschnitte eben bleiben. Nun ist $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E} = \frac{N}{EF}$; $\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} = \frac{1}{E}\left(\frac{N}{F} + \frac{M}{\mathfrak{J}}e\right)$; $\varepsilon_1 = \frac{N}{EF} + \frac{M}{E\mathfrak{J}}e$, wo e der Abstand jeder der äussersten Fasern von der axialen Faser ist, und endlich $\varepsilon_2 = \frac{N}{EF} - \frac{M}{E\mathfrak{J}}e$.

Diese Beziehungen sind in Figur 49 dargestellt.

Der Winkel, um den sich hierbei der zweite Querschnitt gegen den ersten neigt, d. h. der von M und N herrührende Beitrag zu dem Kontingenzwinkel ist

$$d\varphi_1 = \frac{ds(1+\varepsilon_1) - ds(1+\varepsilon_2)}{2e} = \frac{ds}{2e}\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right) = \frac{ds}{2e}\left(\frac{N}{EF} + \frac{M}{EJ}e - \frac{N}{EF} + \frac{M}{EJ}e\right); \quad d\varphi_1 = \frac{M}{EJ}ds.$$

Nun möge der Einfluss von Q auf den Kontingenzwinkel ermittelt werden. Hierzu bedarf es einer vorbereitenden Untersuchung.

Berücksichtigt man beim Belastungsfalle der Figur 50 nur die Querkräfte und vernachlässigt man die veränderte Neigung der Axe gegen die Kräfte, so ergiebt die übliche Querkraftslinie

$$\alpha_1 = \frac{P_1 + P_2}{\beta FG}; \quad \alpha_2 = \frac{P_2}{\beta FG},$$

worin G die Ziffer der Schubelastizität ist, und β ein von der Querschnittsform abhängiger Festwert ist, worüber sich in Bach's Buch: Elastizität und Festigkeit, 1. Aufl., S. 283, Näheres vorfindet.

Anmerkung. Bei dem in Figur 50 dargestellten Stabe ist, trotzdem er eingespannt ist, der Winkel bei $s = 0$ nicht $\varphi = 0$, sondern

$$\varphi = \alpha_1 = \frac{A}{\beta F \cdot G},$$

wenn A die zur Einspannung quer gerichtete Reaktion ist.

Die Winkeländerung an der Stelle, wo sich die Querkraft ändert, ist

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{P_2 - P_1 - P_2}{\beta FG} = -\frac{P_1}{\beta FG};$$

nun ist $\alpha_2 - \alpha_1 = d\alpha$; $-P_1 = dQ$, also ist der Kontingenzwinkel an der Stelle, wo sich Q um dQ ändert $d\alpha = \frac{dQ}{\beta FG}$.

Mit Vernächlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung kann dieses Resultat auch auf den stark gekrümmten Stab, auf welchen sich diese Untersuchung erstreckt, angewendet werden.

Es ist also der Beitrag der Querkraft zu dem Kontingenzwinkel $d\varphi_2 = \frac{dQ}{\beta GF}$, und es kann insgesamt, wobei allerdings kleine Grössen höherer Ordnung vernachlässigt sind, der Kontingenzwinkel des Stabes gesetzt werden $d\varphi = d\varphi_1 + d\varphi_2$;

Gl. 1) $$d\varphi = \frac{M}{EJ}\, ds + \frac{dQ}{\beta GF}.$$

Diese Beziehung ist in Figur 51 zur Darstellung gebracht.

Aus dieser Figur 51 ergiebt sich $\frac{d\sigma}{\varrho} = d\varphi$; $\frac{1}{\varrho} = \frac{d\varphi}{d\sigma}$, und zwar ist aufgrund von Figur 49

Gl. 2) $$d\sigma = (1 + \varepsilon_0)\, ds.$$

Es folgt hiermit aus Gleichung 1

$$\frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{1}{\varrho} = \frac{M}{EJ}\frac{ds}{d\sigma} + \frac{1}{\beta GF}\frac{dQ}{d\sigma}; \quad \frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{M}{EJ}\frac{1}{(1+\varepsilon_0)} + \frac{1}{\beta GF}\frac{dQ}{d\sigma}; \quad (1+\varepsilon_0)\frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{M}{EJ} + \frac{(1+\varepsilon_0)}{\beta GF}\frac{dQ}{d\sigma}.$$

Nun ist $Q = P \sin\varphi$ und $\frac{dQ}{d\sigma} = \frac{dQ}{d\varphi}\frac{d\varphi}{d\sigma} = P\cos\varphi\frac{d\varphi}{d\sigma}$, also ist

$$(1+\varepsilon_0)\frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{M}{EJ} + \frac{(1+\varepsilon_0)}{\beta GF} P\cos\varphi\frac{d\varphi}{d\sigma}; \quad (1+\varepsilon_0)\frac{d\varphi}{d\sigma}\left(1 - \frac{P}{\beta GF}\cos\varphi\right) = \frac{M}{EJ}.$$

Es ist aber $\varepsilon_0 = \frac{N}{EF} = -\frac{P}{EF}\cos\varphi$, und wenn man $\frac{P}{EF} = \nu^2$; $\frac{P}{\beta GF} = \omega^2$ setzt, so hat man $(1 - \nu^2\cos\varphi)(1 - \omega^2\cos\varphi)\frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{M}{EJ}$, und da $M = -P \cdot y$ ist, so ist, wenn $\frac{P}{EJ} = p^2$ gesetzt wird, $(1 - \nu^2\cos\varphi)(1 - \omega^2\cos\varphi)\frac{d\varphi}{d\sigma} = -p^2 \cdot y$; $(1 - \nu^2\cos\varphi - \omega^2\cos\varphi + \nu^2\omega^2\cos^2\varphi)\frac{d\varphi}{d\sigma} = -p^2 \cdot y$.

Nun kann, da im Vorausgehenden schon Vernachlässigungen zugelassen worden sind, auch $\nu^2\omega^2\cos^2\varphi$ als kleine Grösse höherer Ordnung vernachlässigt werden, also hat man $(1 - (\nu^2 + \omega^2)\cos\varphi)\frac{d\varphi}{d\sigma} = -p^2 \cdot y$. Setzt man noch zur Abkürzung $\nu^2 + \omega^2 = \lambda^2$, so dass

Gl. 3) $$\lambda^2 = \frac{P}{F}\left(\frac{1}{E} + \frac{1}{\beta G}\right)$$

ist, dann hat man

Gl. 4) $$(1 - \lambda^2\cos\varphi)\frac{d\varphi}{d\sigma} = -p^2 \cdot y.$$

Durch Differentiation bekommt man hieraus $d\left[\frac{(1-\lambda^2\cos\varphi)\,d\varphi}{d\sigma}\right] = -p^2 \cdot dy$; es ist aber $d\frac{(1-\lambda^2\cos\varphi)\,d\varphi}{d\sigma} = \frac{d\sigma\{(1-\lambda^2\cos\varphi)\,d^2\varphi + (\lambda^2\sin\varphi)\,d\varphi^2\} - (1-\lambda^2\cos\varphi)\,d\varphi\,d^2\sigma}{d\sigma^2}$, also ist

$$-p^2\frac{dy}{d\sigma} = \frac{(1-\lambda^2\cos\varphi)\,d^2\varphi + \lambda^2\sin\varphi\,d\varphi^2}{d\sigma^2} - (1-\lambda^2\cos\varphi)\frac{d\varphi}{d\sigma}\frac{d^2\sigma}{d\sigma^2};$$

da aber $\frac{d^2\sigma}{d\sigma^2} = \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{d\sigma}{d\sigma}\right) = \frac{d}{d\sigma}(1) = 0$ ist, so ist, weil noch $\frac{dy}{d\sigma} = \sin\varphi$ ist,

Gl. 5) $$(1 - \lambda^2\cos\varphi)\frac{d^2\varphi}{d\sigma^2} + \lambda^2\sin\varphi\left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2 = -p^2\sin\varphi.$$

Setzt man

Gl. 6) $$\frac{d\varphi}{d\sigma} = z\,,$$

dann ist $\frac{d^2\varphi}{d\sigma^2} = \frac{dz}{d\sigma} = \frac{dz}{d\varphi}\frac{d\varphi}{d\sigma} = z\frac{dz}{d\varphi}$, und man hat die Gleichung

$$(1-\lambda^2\cos\varphi)\,z\frac{dz}{d\varphi} + \lambda^2\sin\varphi\,z^2 \quad -p^2\sin\varphi, \text{ und daraus } \frac{dz}{d\varphi} = -\frac{(p^2+\lambda^2 z^2)\sin\varphi}{z(1-\lambda^2\cos\varphi)},$$

schliesslich durch Trennung der Variablen

$$\frac{z\,dz}{p^2+\lambda^2 z^2} = -\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{1-\lambda^2\cos\varphi}; \quad \frac{z\,dz}{\lambda^2\left(\frac{p^2}{\lambda^2}+z^2\right)} = -\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\lambda^2\left(\frac{1}{\lambda^2}-\cos\varphi\right)}; \quad \frac{z\,dz}{\frac{p^2}{\lambda^2}+z^2} = -\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\frac{1}{\lambda^2}-\cos\varphi}.$$

Nun ist $d\left(\frac{p^2}{\lambda^2}+z^2\right) = 2z\,dz$; $d\left(\frac{1}{\lambda^2}-\cos\varphi\right) = \sin\varphi\,d\varphi$, also ist

$$\frac{1}{2}\frac{d\left(\frac{p^2}{\lambda^2}+z^2\right)}{\frac{p^2}{\lambda^2}+z^2} = -\frac{d\left(\frac{1}{\lambda^2}-\cos\varphi\right)}{\frac{1}{\lambda^2}-\cos\varphi},$$

so dass die Integration ergiebt

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{p^2}{\lambda^2}+z^2\right) = -\log\left(\frac{1}{\lambda^2}-\cos\varphi\right)+\log c;$$

$$\sqrt{\frac{p^2}{\lambda^2}+z^2} = \frac{c}{\frac{1}{\lambda^2}-\cos\varphi}; \quad \frac{p^2}{\lambda^2}+z^2 = \frac{c^2}{\left(\frac{1}{\lambda^2}-\cos\varphi\right)^2};$$

$$z^2 = \frac{c^2}{\left(\frac{1}{\lambda^2}-\cos\varphi\right)^2} - \frac{p^2}{\lambda^2} = \frac{\lambda^4 c^2 - \frac{p^2}{\lambda^2}(1-\lambda^2\cos\varphi)^2}{(1-\lambda^2\cos\varphi)^2} = \frac{p^2}{\lambda^2}\frac{C-(1-\lambda^2\cos\varphi)^2}{(1-\lambda^2\cos\varphi)^2};$$

$$z = \frac{p}{\lambda}\frac{\sqrt{C-(1-\lambda^2\cos\varphi)^2}}{1-\lambda^2\cos\varphi}.$$

Man hat somit, weil $z = \frac{d\varphi}{d\sigma}$ ist, $\frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{p}{\lambda}\frac{\sqrt{C-(1-\lambda^2\cos\varphi)^2}}{1-\lambda^2\cos\varphi}$.

Nun sind nach Figur 35 zusammengehörig $y=0$ und $\varphi=\alpha$, also ist nach Gleichung 4 $(1-\lambda^2\cos\alpha)\frac{d\varphi}{d\sigma} = 0$, d. h. es sind zusammengehörig $y=0$; $\varphi=\alpha$; $\frac{d\varphi}{d\sigma}=0$, und man hat

$$0 = \frac{p}{\lambda}\frac{\sqrt{C-(1-\lambda^2\cos\alpha)^2}}{1-\lambda^2\cos\alpha},$$

woraus $C=(1-\lambda^2\cos\alpha)^2$. Also ist

Gl. 7) $$\frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{p}{\lambda}\frac{\sqrt{(1-\lambda^2\cos\alpha)^2-(1-\lambda^2\cos\varphi)^2}}{1-\lambda^2\cos\varphi}$$

oder nach Trennung der Variablen $\frac{(1-\lambda^2\cos\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{(1-\lambda^2\cos\alpha)^2-(1-\lambda^2\cos\varphi)^2}} = \frac{p}{\lambda}d\sigma.$

Es ist aber

$$\begin{aligned}(1-\lambda^2\cos\alpha)^2 &= 1-2\lambda^2\cos\alpha+\lambda^4\cos^2\alpha\\ (1-\lambda^2\cos\varphi)^2 &= 1-2\lambda^2\cos\varphi+\lambda^4\cos^2\varphi\end{aligned}$$

$$(1-\lambda^2\cos\alpha)^2-(1-\lambda^2\cos\varphi)^2 = 2\lambda^2(\cos\varphi-\cos\alpha)-\lambda^4(\cos^2\varphi-\cos^2\alpha)$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= 1-2\sin^2\frac{\varphi}{2}\\ -\cos\alpha &= -1+2\sin^2\frac{\alpha}{2}\end{aligned}$$

$$\cos\varphi-\cos\alpha = 2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\cos^2\varphi = 1 - 4\sin^2\frac{\varphi}{2} + 4\sin^4\frac{\varphi}{2}$$
$$-\cos^2\alpha = -1 + 4\sin^2\frac{\alpha}{2} - 4\sin^4\frac{\alpha}{2}$$
$$\cos^2\varphi - \cos^2\alpha = 4\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right) - 4\left(\sin^4\frac{\alpha}{2} - \sin^4\frac{\varphi}{2}\right)$$

also ist

$$\sqrt{(1-\lambda^2\cos\alpha)^2 - (1-\lambda^2\cos\varphi)^2}$$
$$= \sqrt{4\lambda^2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right) - 4\lambda^4\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right) + 4\lambda^4\left(\sin^4\frac{\alpha}{2} - \sin^4\frac{\varphi}{2}\right)}$$
$$= 2\lambda\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}} \cdot \sqrt{1 - \lambda^2 + \lambda^2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

Und da nach Gleichung 2 $d\sigma = (1 - \nu^2\cos\varphi)\,ds$ ist, wo ds das Element der ursprünglichen geraden Stabaxe ist, so hat man

$$\frac{1-\lambda^2\cos\varphi}{1-\nu^2\cos\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2+\lambda^2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)}\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}} = 2\,pds.$$

Da $\frac{1-\lambda^2\cos\varphi}{1-\nu^2\cos\varphi} = (1-\lambda^2\cos\varphi)\,(1-\nu^2\cos\varphi)^{-1} = (1-\lambda^2\cos\varphi)\,(1+\nu^2\cos\varphi+\cdots\cdots)$
$= 1 - \lambda^2\cos\varphi + \nu^2\cos\varphi$ ist, wenn die Glieder höherer Ordnung vernachlässigt werden, so hat man $\frac{1-\lambda^2\cos\varphi}{1-\nu^2\cos\varphi} = 1 - (\lambda^2-\nu^2)\cos\varphi = 1 - (\nu^2+\omega^2-\nu^2)\cos\varphi = 1 - \omega^2\cos\varphi = 1 - \omega^2 + 2\omega^2\sin^2\frac{\varphi}{2}$, und obige Differentialgleichung wird zu

Gl. 8)
$$\frac{1-\omega^2+2\omega^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1-\lambda^2+\lambda^2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}} = 2\,pds.$$

Anmerkung. Setzt man $\sin\frac{\varphi}{2} = u\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$, so wird der Radicand eine Funktion 6. Grades von u, das Integral ist ein hyperelliptisches, seine Ausführung würde voraussichtlich die Einführung höherer Transcendenten nötig machen.

Wegen der wiederholten Vernachlässigungen verlohnt es sich nicht nach einer exacten Integration dieser Gleichung zu suchen, es soll hier vielmehr nur eine angenäherte Lösung unternommen werden.

Schreibt man zu diesem Zwecke die Gleichung, wie folgt:

$$\frac{\left(1-\omega^2+2\omega^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\left(1-\lambda^2+\lambda^2(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\varphi}{2})\right)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}} \cdot d\varphi = 2\,pds,$$

dann hat der Zähler, wenn die Grössen höherer Ordnung vernachlässigt werden, den Wert

$$\left(1-\omega^2+2\omega^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\left(1+\frac{\lambda^2}{2}(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2})\right);$$
$$1-\omega^2+2\omega^2\sin^2\frac{\varphi}{2}+\frac{\lambda^2}{2}\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}\right);$$
$$1-\omega^2+\frac{\lambda^2}{2}-\frac{\lambda^2}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}+\left(2\omega^2-\frac{\lambda^2}{2}\right)\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

so dass mit $1-\omega^2+\frac{\lambda^2}{2}\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = C_1$ und $2\omega^2 - \frac{\lambda^2}{2} = C_2$ die Gleichung wird zu

$$\frac{\left(C_1 + C_2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right) d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} = 2\, p\, ds.$$

Setzt man nun $\sin \frac{\alpha}{2} = k$ und $\sin \frac{\varphi}{2} = u \cdot k$; $d\varphi = 2\, k \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 u^2}}$, so ist

$$\frac{(C_1 + C_2 k^2 u^2) \cdot du}{\sqrt{1 - u^2} \cdot \sqrt{1 - k^2 u^2}} = p\, ds; \quad C_1 \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}} + C_2 k^2 \frac{u^2\, du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}} = p\, ds.$$

Macht man die Substitution $u = sn\,[z]$, so ist

$$du = cn\,[z]\, dn\,[z]\, dz = \sqrt{1 - u^2} \cdot \sqrt{1 - k^2 u^2} \cdot dz,$$

also hat man $C_1\, dz + C_2 k^2 sn^2\,[z]\, dz = p\, ds$ und durch Integration und Verwendung der Seite 4 und 5 gemachten Ableitungen

$$C_1 z + C_2 \left\{ z \frac{\Theta''(o)}{\Theta(o)} - \frac{\Theta'(s)}{\Theta(s)} \right\} = p\,(s - s_c);$$

$$C_1 z + C_2 \left\{ z \frac{b}{2} - 2 \frac{\pi}{K} \sin \frac{\pi}{K} z \cdot f\left(\cos \frac{\pi}{K} z\right) \right\} = p\,(s - s_c).$$

Es ist aber, wenn $s = o$ ist, $\sin \frac{\varphi}{2} = o$; $u = o$; $z = o$, denn P ist der Einspannung parallel, also ist dort keine Querkraft vorhanden, daher bleibt $\varphi = o$.

Es ist demnach $s_c = o$, und man hat

$$\left(C_1 + \frac{C_2}{2} b\right) z - \frac{C_2}{2} \frac{4\pi}{K} \sin \frac{\pi}{K} z \cdot f\left(\cos \frac{\pi}{K} z\right) = p \cdot s.$$

Es sind aber $s = l$ und $\sin \frac{\varphi}{2} = k$ somit noch $u = 1$ zusammengehörig; damit aber $u = sn\,(z) = 1$ sei, muss $z = K$ sein, also ist $\left(C_1 + \frac{C_2}{2} b\right) \cdot K - o = p \cdot l$;

Gl. 9)
$$K = pl \frac{1}{C_1 + \frac{C_2}{2} b}.$$

Da in C_1 die Grösse k und in b die Grösse q enthalten ist, so müssen noch zur Lösung dieser Gleichung die Gleichungen beigezogen werden, welche die Beziehung zwischen K und k sowie zwischen k und q darstellen.

Betrachtet man jetzt z als unabhängige Variable, welche nach dem obigen Werte zwischen o und K annehmen kann, so ist

Gl. 10)
$$s = \frac{1}{p} \left\{ \left(C_1 + \frac{C_2}{2} b\right) z - \frac{C_2}{2} \frac{4\pi}{K} \sin \left[\frac{\pi}{K} z\right] \cdot f\left(\cos \left[\frac{\pi}{K} z\right]\right) \right\}.$$

Daraus ergiebt sich

$$ds = \frac{1}{p} \left\{ \left(C_1 + \frac{C_2}{2} b\right) dz - \frac{C_2}{2} \frac{4\pi}{K} \cos \left[\frac{\pi}{K} z\right] \frac{\pi}{K} \cdot f\left(\cos \left[\frac{\pi}{K} z\right]\right) dz \right.$$
$$\left. + \frac{C_2}{2} \frac{4\pi}{K} \sin \left[\frac{\pi}{K} z\right] \cdot f'\left(\cos \left[\frac{\pi}{K} z\right]\right) \sin \left[\frac{\pi}{K} z\right] \frac{\pi}{K} dz \right\};$$

$$ds = \frac{1}{p} \left\{ \left(C_1 + \frac{C_2}{2} b\right) dz - \frac{C_2}{2} \frac{4\pi^2}{K^2} \left[\cos \left[\frac{\pi}{K} z\right] \cdot f\left(\cos \left[\frac{\pi}{K} z\right]\right) - \sin^2 \left[\frac{\pi}{K} z\right] \cdot f'\left(\cos \left[\frac{\pi}{K} z\right]\right) \right] dz \right\}.$$

Ferner ist $d\varphi = 2\, k \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 u^2}}$ und $du = \sqrt{1 - u^2} \cdot \sqrt{1 - k^2 u^2}\, dz$, also ist

$$d\varphi = 2\, k \sqrt{1 - u^2} \cdot dz = 2\, k\, cn\,[z]\, dz,$$

und man hat

$$\frac{d\varphi}{ds} = 2\, pk\, cn\,[z] \frac{1}{C_1 + \frac{C_2}{2} b - \frac{C_2}{2} \frac{4\pi^2}{K^2} \left[\cos \left[\frac{\pi}{K} z\right] \cdot f\left(\cos \left[\frac{\pi}{K} z\right]\right) - \sin^2 \left[\frac{\pi}{K} z\right] \cdot f'\left(\cos \left[\frac{\pi}{K} z\right]\right) \right]}.$$

Es ist aber nach Seite 47

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{M}{EJ}\,\frac{1}{1-\omega^2\cos\varphi} = -p^2 y\,\frac{1}{1-\omega^2\cos\varphi} = -p^2 y\,\frac{1}{1-\omega^2+2\omega^2\sin^2\frac{\varphi}{2}} = -p^2 y\,\frac{1}{1-\omega^2+2\omega^2 k^2 sn^2[z]},$$

also ist

Gl. 11)
$$y = -2\,\frac{k}{p}\,cn[z]\,\frac{1-\omega^2+2\omega^2 k^2 sn^2[z]}{C_1+\frac{C_2}{2}b-\frac{C_2}{2}\frac{4\pi^2}{K^2}\left[\ldots\ldots\ldots\right]}.$$

Nun sind zusammengehörig $s = l$, $z = K$ und $y = 0$; diese Bedingung wird von der Gleichung richtig erfüllt, denn $cn[K]$ ist $= 0$.

Ausserdem sind zusammengehörig $s = 0$, $z = 0$ und $y = -\delta$, d. h. es ist

$$\delta = 2\,\frac{k}{p}\,\frac{1-\omega^2}{C_1+\frac{C_2}{2}b-\frac{C_2}{2}\frac{4\pi^2}{K^2}\left[1\cdot f(1)-0\right]}.$$

Da nach Seite 5

$$f\left(\cos\frac{\pi}{K}z\right) = \frac{q}{1-2q\cos\frac{\pi}{K}z+q^2}+\frac{q^3}{1-2q^3\cos\frac{\pi}{K}z+q^6}+\cdots \text{ ist,}$$

so ist $f(1) = \frac{q}{1-2q+q^2}+\frac{q^3}{1-2q^3+q^6}+\cdots = \frac{b}{\left(\frac{2\pi}{K}\right)^2}$, und man hat

Gl. 12)
$$\delta = 2\,\frac{k}{p}\,\frac{1-\omega^2}{C_1}.$$

Es ist ferner $\frac{dx}{d\sigma} = \cos\varphi = 1-2k^2 sn^2[z]$, und da $d\sigma = ds(1-v^2\cos\varphi) = ds\left(1-v^2(1-2k^2 sn^2[z])\right)$, so ist $\frac{dx}{ds} = \left[(1-v^2)+v^2\,2k^2 sn^2[z]\right]\cdot\left[1-2k^2 sn^2[z]\right]$

$$= (1-v^2)-(1-v^2)\,2k^2 sn^2[z]+v^2\,2k^2 sn^2[z]-4v^2k^4 sn^4[z];$$

$$\frac{dx}{ds} = (1-v^2)-(1-2v^2)\,2k^2 sn^2[z]-4v^2k^4 sn^4[z].$$

Wollte man nun für ds den genauen Wert einführen, so würden wohl die Schwierigkeiten der weiteren Behandlung unüberwindlich sein; es soll deshalb hier als Annäherung $ds = \frac{1}{p}\,v\,dz$ gesetzt werden, worin v als der Mittelwert des in Wirklichkeit mit z veränderlichen Klammerausdruckes in der Formel für ds zu denken ist, genommen für die der betreffenden Stelle vorausgehenden Bogenteile.

Dann ist $p\,\frac{dx}{v} = (1-v^2)\,dz-(1-2v^2)\,2k^2 sn^2[z]\,dz-4v^2k^4 sn^4[z]\,dz,$

woraus durch Integration

$$p\,\frac{x-x_c}{v} = (1-v^2)\,z-(2-4v^2)\,k^2\int sn^2[z]\,dz-4v^2k^4\int sn^4[z]\,dz.$$

Nun ist (Appell-Lacour Seite 240)

$$3k^2\int sn^4[z]\,dz = sn[z]\,cn[z]\,dn[z]-z+2(1+k^2)\int sn^2[z]\,dz,$$

also ist $-4v^2k^4\int sn^4[z]\,dz = +\frac{4v^2k^2}{3}z-\frac{4v^2k^2}{3}sn[z]\,cn[z]\,dn[z]-\frac{8v^2k^2}{3}(1+k^2)\int sn^2[z]\,dz,$

und man hat

$$p\,\frac{x-x_c}{v} = (1-v^2+\tfrac{4}{3}v^2k^2)\,z-\tfrac{4}{3}v^2k^2\,sn[z]\,cn[z]\,dn[z]-\left(2-4v^2+\tfrac{8}{3}v^2(1+k^2)\right)k^2\int sn^2[z]\,dz;$$

$$p\frac{x-x_c}{v} = (1-v^2+\tfrac{4}{3}v^2k^2)\,z - \tfrac{4}{3}v^2k^2\,sn[z]\,cn[z]\,dn[z]$$
$$-\left[2-4v^2+\tfrac{8}{3}v^2(1+k^2)\right]\cdot\left\{z\frac{b}{2}-2\frac{\pi}{K}\sin\frac{\pi}{K}z\cdot f\left(\cos\frac{\pi}{K}z\right)\right\};$$

$$p\frac{x-x_c}{v} = \left[1-v^2+\tfrac{4}{3}v^2k^2-\left(1-2v^2+\tfrac{4}{3}v^2(1+k^2)\right)b\right]z-\tfrac{4}{3}v^2k^2\,sn[z]\,cn[z]\,dn[z]$$
$$+\left[1-2v^2+\tfrac{4}{3}v^2(1+k^2)\right]\frac{4\pi}{K}\sin\frac{\pi}{K}z\cdot f\left(\cos\frac{\pi}{K}z\right);$$

$$p\frac{x-x_c}{v} = \left[1-v^2+\tfrac{4}{3}v^2k^2-\left[1-\tfrac{2}{3}v^2+\tfrac{4}{3}v^2k^2\right]b\right]z-\tfrac{4}{3}v^2k^2\,sn[z]\,cn[z]\,dn[z]$$
$$+\left[1-\tfrac{2}{3}v^2+\tfrac{4}{3}v^2k^2\right]\frac{4\pi}{K}\sin\frac{\pi}{K}z\cdot f\left(\cos\frac{\pi}{K}z\right).$$

Da $x=0$ und $z=0$ zusammengehörig sind, so ist $x_c=0$, und man hat

Gl. 13) $$\frac{p}{v}\cdot x = \left[1-v^2+\tfrac{4}{3}v^2k^2-\left(1-\tfrac{2}{3}v^2+\tfrac{4}{3}v^2k^2\right)b\right]z-\tfrac{4}{3}v^2k^2\,sn[z]\,cn[z]\,dn[z]$$
$$+\left[1-\tfrac{2}{3}v^2+\tfrac{4}{3}v^2k^2\right]\frac{4\pi}{K}\sin\frac{\pi}{K}z\cdot f\left(\cos\frac{\pi}{K}z\right).$$

Für die Abscisse des Lastangriffspunktes ist $z=K$, also ist

$$\frac{p}{v}\cdot x_a = \left[1-v^2+\tfrac{4}{3}v^2k^2-\left(1-\tfrac{2}{3}v^2+\tfrac{4}{3}v^2k^2\right)b\right]K$$
$$=\left[1-v^2+\tfrac{4}{3}v^2k^2-\left(1-v^2+\tfrac{1}{3}v^2+\tfrac{4}{3}v^2k^2\right)b\right]K$$
$$=\left[(1-v^2+\tfrac{4}{3}v^2k^2)(1-b)-\tfrac{1}{3}v^2b\right]K;$$
$$\frac{1}{v}\cdot x_a = \left[(1-v^2+\tfrac{4}{3}v^2k^2)(-a)-\tfrac{1}{3}v^2b\right]\frac{l}{C_1+\frac{C_2}{2}b};$$

Gl. 14) $$x_a = \frac{v}{C_1+\frac{C_2}{2}b}\left[(1-v^2+\tfrac{4}{3}v^2k^2)(-a)-\tfrac{1}{3}v^2b\right]l.$$

Ehe weitergegangen wird, soll kontrolliert werden, ob die bis hierher gefundenen Formeln mit $v^2=0$ und $\omega^2=0$ in die Formeln des zweiten Falles übergehen.

Wenn $v^2=0$ und $\omega^2=0$ ist, so ist auch $\lambda^2=0$, und es ist $C_1=1$, $C_2=0$.

Damit wird Gl. 10 zu $s=\frac{1}{p}z$; $z=ps$.

Gl. 11 wird zu $y=-2\frac{k}{p}\,cn[ps]$.

Gl. 13 wird zu

$$\frac{p}{v}x=[1-b]ps+\frac{4\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}ps\right]\cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}ps\right]\right),$$

d. h. da $v=1$ wird,

$$x=-as+\frac{4}{p}\frac{\pi}{K}\sin\left[\frac{\pi}{K}ps\right]\cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}ps\right]\right).$$

Gl. 9 wird zu $K=pl$.

Gl. 12 wird zu $\delta=\frac{2k}{p}$.

Gl. 14 wird zu $x_a=-al$.

Es gehen also thatsächlich die Formeln über in die entsprechenden Formeln des zweiten Falles.

Sollen in einem gegebenen Falle z. B. für den Lastangriffspunkt δ und x_a gerechnet werden, so wird man zuerst in Gl. 9 drei zusammengehörige Werte K, k und q einsetzen und dies so lange wiederholen, bis die Gleichung zum Stimmen gebracht ist; es wird hierbei K nicht sehr verschieden von pl sein.

Hat man so durch Probieren K; k und q bestimmt, dann hat man aus Gleichung 12 $\delta = 2\frac{k}{p}\frac{1-\omega^2}{C_1}$.

Um für das Stabende v zu berechnen, kann man etwa in die Formel

$$v_z = C_1 + \frac{C_2}{2}b - \frac{C_2}{2}\frac{4\pi^2}{K^2}\left[\cos\left[\frac{\pi}{K}z\right]\cdot f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}z\right]\right) - \sin^2\left[\frac{\pi}{K}z\right]\cdot f'\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}z\right]\right)\right]$$

der Reihe nach

$$z=0;\quad z=1\frac{K}{m};\quad z=2\frac{K}{m};\quad z=3\frac{K}{m};\quad \cdots\cdot z=m\frac{K}{m}$$

einsetzen und hat angenähert $v = \frac{\sum_0^m v_z}{m+1}$.

Ist v berechnet, dann hat man aus Gleichung 14

$$x_a = \frac{v}{C_1+\frac{C_2}{2}b}\left[-a\left(1-v^2+\frac{4}{3}v^2k^2\right)-\frac{1}{3}v^2b\right]l,$$

und zwar haben a und b die auf Seite 5 angegebenen Bedeutungen.

Vorliegende Untersuchung wird ihre hauptsächliche Anwendung finden bei der Bestimmung der Grenze, bis zu welcher die geradlinige Gleichgewichtsfigur der Figur 44 stabil ist. Diese geradlinige Gleichgewichtsfigur ist stabil, so lange keine Gleichgewichtsfigur möglich ist, bei der $\delta > 0$ ist. An der Grenze der Stabilität ist $\delta = 0$.

Wenn aber $\delta = 0$ ist, so ist nach Gleichung 12 $k = 0$; zu diesem Werte von k gehören aber die Werte

$$K=\frac{\pi}{2};\quad q=0;\quad b=0;\quad f\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}z\right]\right)=0 \text{ und } f'\left(\cos\left[\frac{\pi}{K}z\right]\right)=0.$$

Dann lautet die Gleichung 9

$$\frac{\pi}{2} = pl\frac{1}{C_1};\quad \frac{\pi}{2} = \frac{pl}{1-\omega^2+\frac{\lambda^2}{2}} = \frac{pl}{1-\omega^2+\frac{\nu^2}{2}+\frac{\omega^2}{2}} = \frac{pl}{1+\frac{\nu^2}{2}-\frac{\omega^2}{2}} = \frac{pl}{1-\frac{1}{2}(\omega^2-\nu^2)}.$$

Es ist aber mit Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}(\omega^2-\nu^2)} = 1+\frac{1}{2}(\omega^2-\nu^2) = \sqrt{1+(\omega^2-\nu^2)},\ \text{also ist}\ \frac{\pi}{2} = pl\sqrt{1+(\omega^2-\nu^2)};$$

$$p = \frac{\pi}{2l\sqrt{1+(\omega^2-\nu^2)}};\quad p^2 = \frac{\pi^2}{4l^2(1+\omega^2-\nu^2)};\quad P = \frac{\pi^2EJ}{4l^2(1+\omega^2-\nu^2)}.$$

Es ist also die geradlinige Gleichgewichtsfigur der Figur 44 stabil, wenn

$$P <= \frac{1}{4}\frac{\pi^2EJ}{l^2(1+\omega^2-\nu^2)}.$$

Anmerkung. Wenn $k = 0$ ist, so ist $v = C_1$ und $-a = 1$, und man hat $x_a = (1-\nu^2)l$; $x_a = \left(1-\frac{P}{EF}\right)l$, wie sein muss, denn der Stab ist durch die Druckkraft P um $\frac{P}{EF}l$ gekürzt.

Man findet in der Litteratur der neueren Zeit verschiedene Aufsätze, in welchen unter Berücksichtigung der Normalkraft und des Momentes diejenige Grösse von P ermittelt wird, bei der die geradlinige Gleichgewichtsfigur aufhört stabil zu sein; die Querkraft wird aber dabei vernachlässigt. Mit Hilfe obiger Formel soll gezeigt werden, dass erwähnte Autoren der Wahrheit näher geblieben wären, wenn sie auch die Normalkraft vernachlässigt hätten.

Nach Definition ist $\omega^2 = \frac{P}{\beta GF}$; $\nu^2 = \frac{P}{EF}$. Nun ist (vergl. Grashof: »Theorie der Elasticität und Festigkeit« 2. Aufl. S. 30) im Mittel $G = \frac{2}{5}E$, und nach Bach: »Elasticität und Festigkeit« 1. Aufl.

S. 284 u. 287 ist für den rechteckigen Querschnitt $\beta = \frac{5}{6} = \frac{25}{30}$ und für den Kreisquerschnitt $\beta = \frac{27}{32}$. Nimmt man als Beispiel $\beta = \frac{5}{6}$, so ist $\frac{1}{\beta G} = \frac{1}{\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{5} E} = \frac{3}{E}$, und man hat $v^2 = \frac{P}{EF}$; $\omega^2 = 3 \frac{P}{EF}$.

Bezeichnet man $\frac{P}{EF}$ mit ε_0, dann ist somit die Bedingung der Stabilität

$$P <= \frac{1}{4} \frac{\pi^2 E \mathfrak{J}}{l^2 (1 + 2 \varepsilon_0)},$$

wenn Moment, Normal- und Querkraft berücksichtigt werden.

Wird nur das Moment berücksichtigt, dann ist mit $v^2 = 0$ und $\omega^2 = 0$ die Bedingung der Stabilität

$$P_1 <= \frac{1}{4} \frac{\pi^2 E \mathfrak{J}}{l^2}.$$

Werden nur Moment und Normalkraft berücksichtigt, dann ist die Bedingung der Stabilität, weil $\omega^2 = 0$ ist,

$$P_2 <= \frac{1}{4} \frac{\pi^2 E \mathfrak{J}}{l^2 (1 - \varepsilon_0)}.$$

Es ist also Grenze $P_2 >$ Grenze $P_1 >$ Grenze P.

Wäre nicht ε_0 im Vergleich zu 1 in den Fällen der Anwendung so klein, so wäre bei allen Stäben die geradlinige Gleichgewichtsfigur labil, bei welchen die Kraft P die Grenze

$$P_1 = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 E \mathfrak{J}}{l^2} \text{ oder gar } P_2 = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 E \mathfrak{J}}{l^2 (1 - \varepsilon_0)}$$

erreicht, denn sie hört schon auf stabil zu sein, wenn $P = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 E \mathfrak{J}}{l^2 (1 + 2 \varepsilon_0)}$ ist.

Da aber ε_0 von so kleiner Grösse ist, ist es rechnerisch ganz gleichgiltig, nach welcher Formel man rechnet, um so mehr, als der Wert von E schwankt, und man doch zur Sicherheit nur einen Bruchteil der Grenzbelastung zulässt.

Die Grenze der Stabilität der geradlinigen Gleichgewichtsfigur

$$P <= \frac{1}{4} \frac{\pi^2 E \mathfrak{J}}{l^2 (1 + \omega^2 - v^2)}$$

lässt sich auch folgendermassen schreiben

$$P <= \frac{1}{4} \frac{\pi^2 E \mathfrak{J}}{l^2 \left(1 + \frac{P}{F}\left(\frac{1}{\beta G} - \frac{1}{E}\right)\right)}; \quad P <= \frac{1}{4} \frac{\pi^2 E \mathfrak{J}}{l^2 \left(1 + \frac{P}{EF}\left(\frac{5}{2\beta} - 1\right)\right)},$$

worin β ein mit der Querschnittsfigur wechselnder Koeffizient ist, also hängt die Grenze von P nicht nur von der Grösse des Trägheitsmomentes und der Querschnittsfläche, sondern auch von der Querschnittsfigur ab.

Zur Vervollständigung soll noch untersucht werden, ob und wo bei der elastischen Linie, in welcher alle drei deformierende Einflüsse berücksichtigt sind, eine zur Einspannung normale Tangente vorhanden ist. Dies ist der Fall, wenn $\frac{dy}{dx} = \infty$, d. h. wenn $dx = 0$ ist.

Nun ist nach Seite 51

$$\frac{p}{v} dx = \{1 - v^2 - 2 (1 - 2 v^2) k^2 sn^2 [z] - 4 v^2 k^4 sn^4 [z]\} dz,$$

es muss also, wenn $2 k^2 sn^2 [z] = \xi$ gesetzt wird, $1 - v^2 - (1 - 2 v^2) \xi - v^2 \xi^2 = 0$ sein;

$$\xi^2 + \frac{1 - 2 v^2}{v^2} \xi - \frac{1 - v^2}{v^2} = 0; \quad \xi = -\frac{1 - 2 v^2}{2 v^2} \pm \sqrt{\frac{(1 - 2 v^2)^2}{4 v^4} + \frac{1 - v^2}{v^2}} = \frac{-1 + 2 v^2 \pm 1}{2 v^2}.$$

Von den beiden Vorzeichen ist dasjenige zu nehmen, welches dem ξ einen positiven Wert giebt, weil dieses gleich einem Quadrate ist, also ist $\xi = \frac{-1 + 2 v^2 + 1}{2 v^2} = 1$; $2 k^2 sn^2 [z] = 1$;

$$k = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot sn [z]}.$$

Der kleinste Wert, den k annehmen kann, ist $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ entsprechend $sn[z] = 1$; $z = K$, und zwar ist hier, weil $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, $K = 1{,}854080$, und b ist gleich 0,543066 (vergl. Seite 19). Für diese Werte wird $C_1 = 1 - \omega^2 + \frac{\lambda^2}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1 - \omega^2 + \frac{\lambda^2}{4}$; $C_2 b = \left(2\omega^2 - \frac{\lambda^2}{2}\right)$ 0,543066 oder angenähert $= \left(2\omega^2 - \frac{\lambda^2}{2}\right)\frac{1}{2} = \omega^2 - \frac{\lambda^2}{4}$, also ist $C_1 + \frac{C_2}{2} b = 1 - \omega^2 + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\omega^2}{2} - \frac{\lambda^2}{8}$;

$$C_1 + \frac{C_2}{2} b = 1 - \frac{\omega^2}{2} + \frac{\lambda^2}{8} = 1 - \frac{\omega^2}{2} + \frac{\nu^2}{8} + \frac{\omega^2}{8} = 1 + \frac{\nu^2}{8} - 3\frac{\omega^2}{8},$$

und Gl. 9 wird zu $1{,}854080 = pl \frac{1}{1 + \frac{\nu^2}{8} - 3\frac{\omega^2}{8}}$;

$$l = \frac{1{,}854080}{p}\left(1 + \frac{\nu^2}{8} - 3\frac{\omega^2}{8}\right).$$

Dies ist die kleinste Stablänge, bei der eine zur Kraft P normale Tangente möglich ist.

Aus der allgemeinen Beziehung $2k^2 sn^2[z] = 1$ folgt $sn[z] = \frac{1}{k\sqrt{2}}$; $z = \arg sn\left[\frac{1}{k\sqrt{2}}\right]$.

Setzt man diesen Wert von z in die Gleichungen 10, 11 und 13 ein, so erhält man s, y und x des Berührungspunktes der zu P normalen Tangente.

Es ist Seite 46 schon erwähnt worden, dass bei Berücksichtigung der Querkraft die Anfangstangente im allgemeinen nicht die Richtung der Einspannung hat, sondern mit derselben einen gewissen Winkel bildet. Ist der Stab nun wie beim ersten Fall normal zur Kraft P eingespannt, so ist der Winkelunterschied zwischen der Anfangstangente und der Richtung der Einspannung

$$\vartheta = \frac{A}{\beta GF} = \frac{P}{\beta GF} = \omega^2.$$

Man hat sich nämlich die Einspannung, wie folgt, vorzustellen:

1. wenn die Querkraft nicht berücksichtigt ist, nach Figur 52;
2. wenn die Querkraft allein berücksichtigt ist, nach Figur 53;
3. wenn Moment und Querkraft berücksichtigt sind, nach Figur 54.

Der Unterschied zwischen der elastischen Linie einschliesslich des eingespannten Stückes bei Berücksichtigung des Momentes allein und derjenigen bei Berücksichtigung des Momentes und der Querkraft besteht darin, dass erstere an der Stelle, wo sie die Einspannung verlässt, keine Eigentümlichkeit aufweist, während letztere dort eine Spitze hat.

Wird nun gefragt, wann die elastische Linie, welche unter Berücksichtigung aller drei deformierenden Einflüsse für den nach dem zweiten Fall belasteten Stab sich ergeben hat, Stücke enthält, die mit der entsprechenden elastischen Linie des ersten Falles übereinstimmen, so hat man zu untersuchen, ob die betreffende elastische Linie einen Winkel φ von der Grösse $90 + \vartheta$ enthält, wie dies in der Figur 55 dargestellt ist.

Ist ein Winkel von dieser Grösse vorhanden, so ist $\cos\varphi = \cos(90 + \vartheta) = -\sin\vartheta$ oder mit genügender Annäherung

$$\cos\varphi = -\vartheta = -\omega^2; \quad 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2} = -\omega^2; \quad 2\sin^2\frac{\varphi}{2} = 1 + \omega^2; \quad \sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1+\omega^2}{2};$$

$$k^2 sn^2[z] = \frac{1+\omega^2}{2}; \qquad k = \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{2}\, sn[z]}.$$

Der grösste Wert den $sn[z]$ annehmen kann ist 1, also ist der kleinste Wert von k, bei dem die Einspannung nach dem ersten Falle anfängt möglich zu sein, $k = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\omega^2}$, in Übereinstimmung mit Gleichung D Seite 29, wenn $\sin\varepsilon = \omega^2$ und $x_a = 0$ gesetzt wird.

Aus der allgemeinen Beziehung

$$k^2 sn^2[z] = \frac{1+\omega^2}{2} \text{ folgt } sn[z] = \frac{1}{k\sqrt{2}}\sqrt{1+\omega^2}; \quad z = \arg sn\left[\frac{1}{k\sqrt{2}}\sqrt{1+\omega^2}\right].$$

Setzt man diesen Wert von z in die Gleichungen 10, 11 und 13 ein, so erhält man s_1, y_1 und x_1 des Punktes der elastischen Linie des Falles 2, welcher der Einspannungspunkt ist der gesuchten elastischen Linie des Falles 1. Durch zweckentsprechende Umformung des Koordinatensystemes können die Gleichungen für den ersten Fall aus denjenigen des zweiten Falles erhalten werden. Ist insbesondere l die Stablänge beim zweiten Falle und l_1 die Stablänge beim ersten Falle, so ist

$$l_1 = l - s_1,$$

welche Gleichung dazu dienen kann, aus den übrigen Gleichungen die dem Problem fremde Grösse l zu eliminieren.

Schlussbemerkung.

Vorstehende Entwickelungen sind nicht geeignet, in der Praxis eine direkte Anwendung zu finden. Sie sollen vielmehr nur zur Aufklärung des Wesens der behandelten Vorgänge beitragen. Bei den Deformationen wirklicher Stäbe spielen vielerlei Einflüsse mit, die unmöglich in theoretischen Formeln berücksichtigt werden können, sondern nur in solchen Formeln zum Ausdruck kommen, welche auf experimentellem Wege erhalten worden sind.

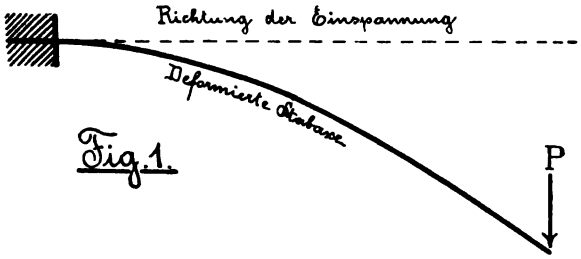


Fig. 1.

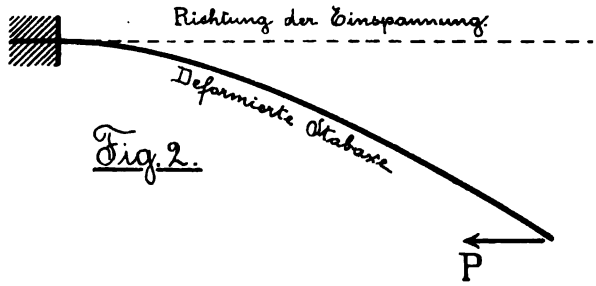


Fig. 2.

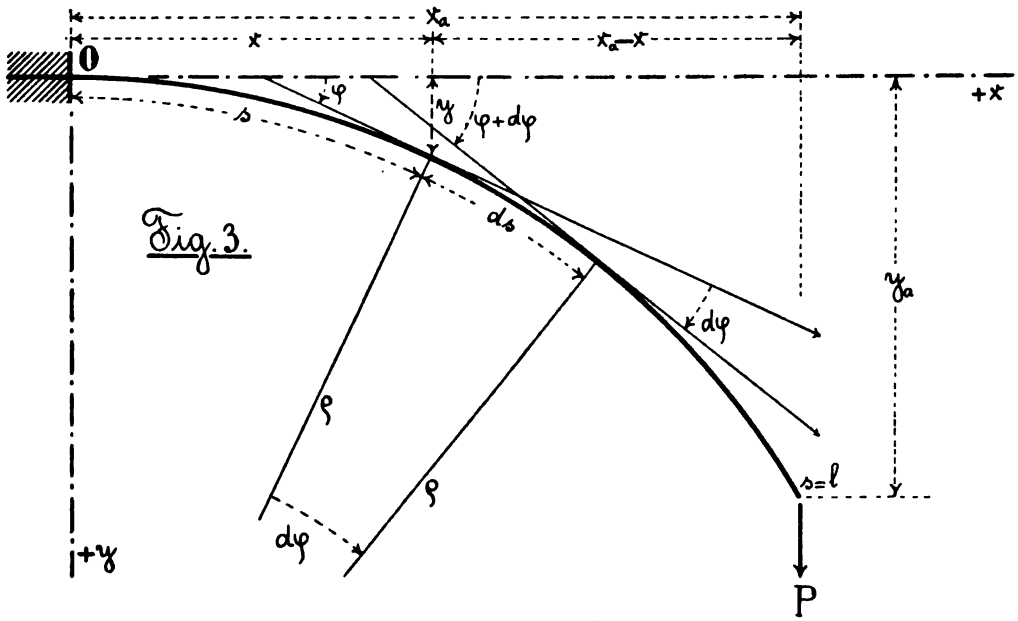


Fig. 3.

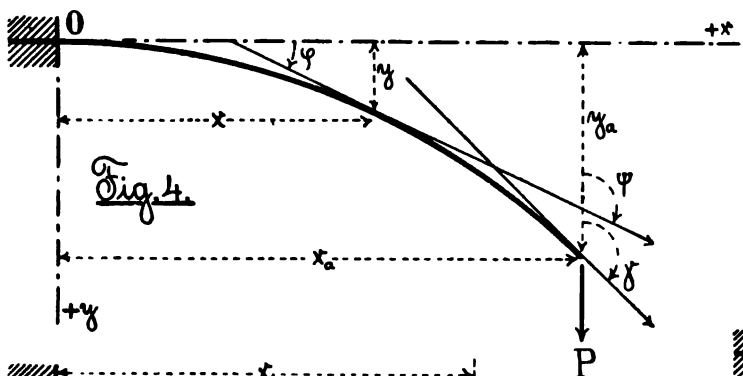


Fig. 4.

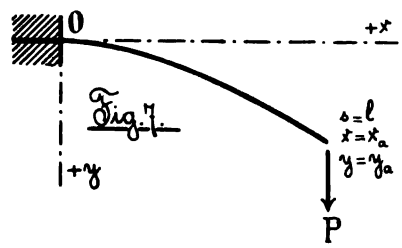


Fig. 7.

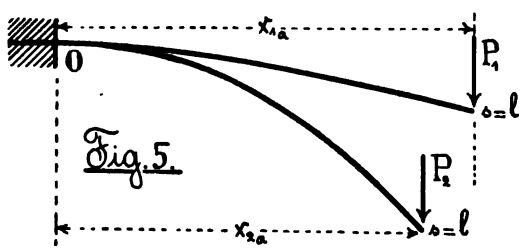


Fig. 5.

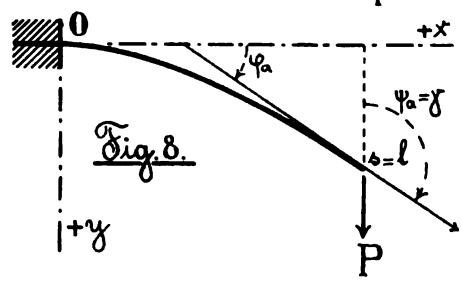


Fig. 8.

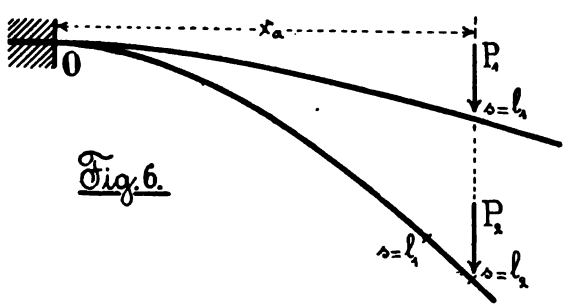


Fig. 6.

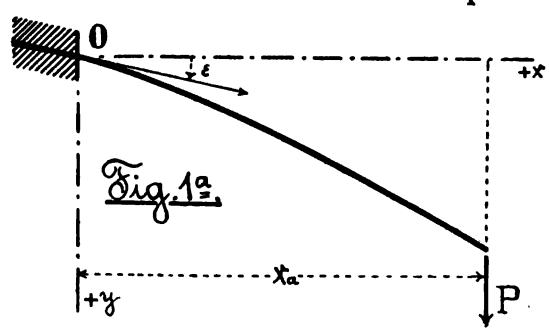


Fig. 1a.

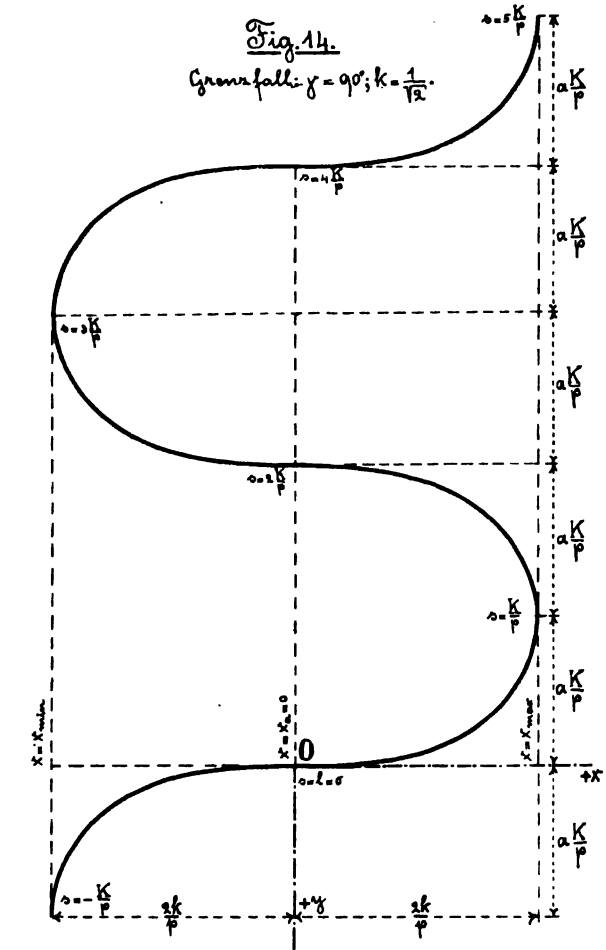


Fig. 14.
Grenzfall: γ = 90°; k = 1/√2.

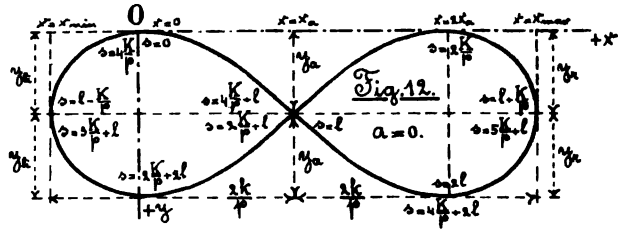


Fig. 12.
a = 0.

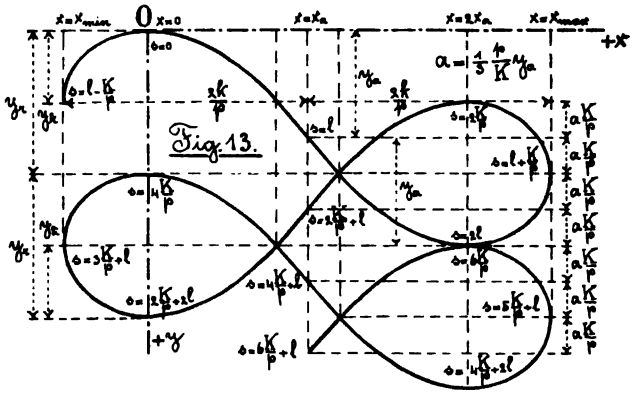


Fig. 13.

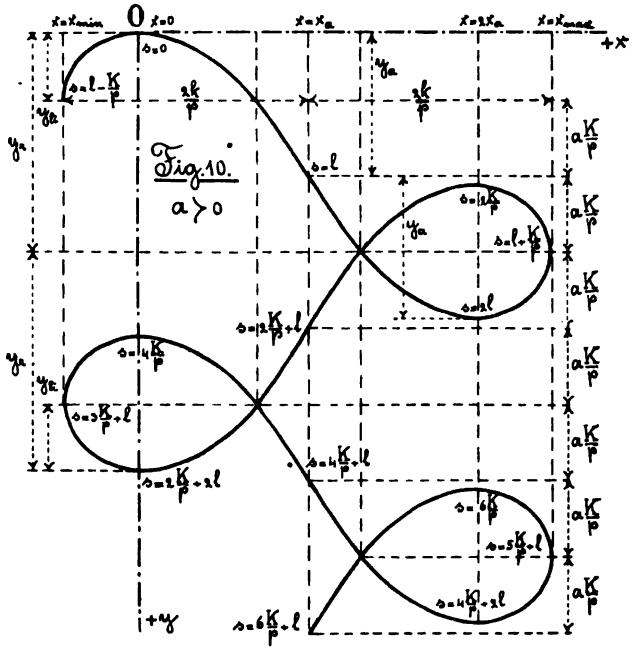


Fig. 10.
a > 0

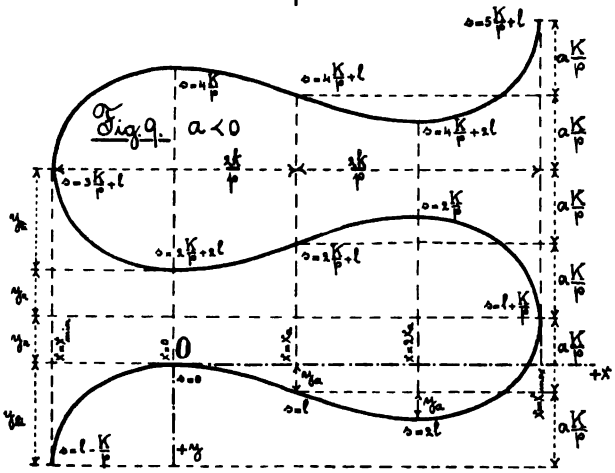


Fig. 9.
a < 0

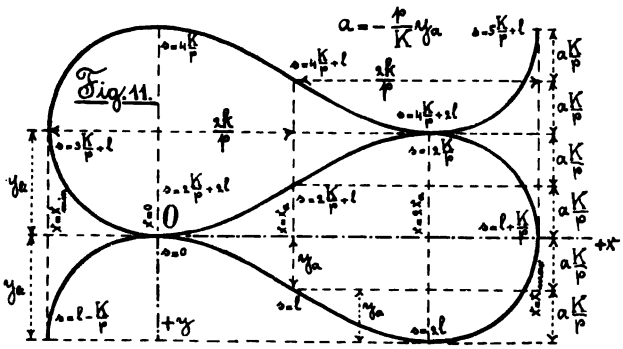


Fig. 11.

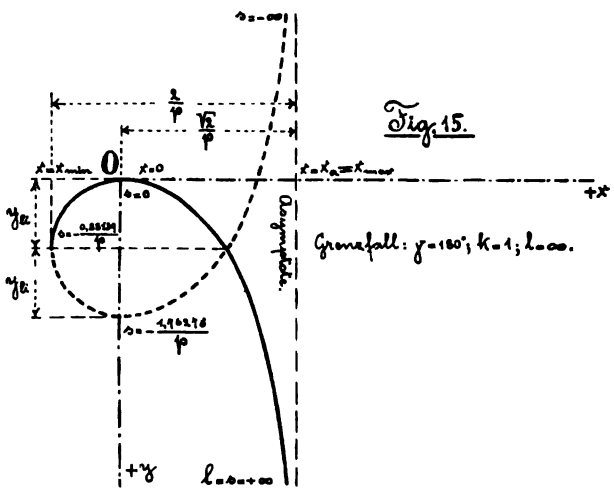


Fig. 15.
Grenzfall: γ = 180°; k = 1; l = ∞.

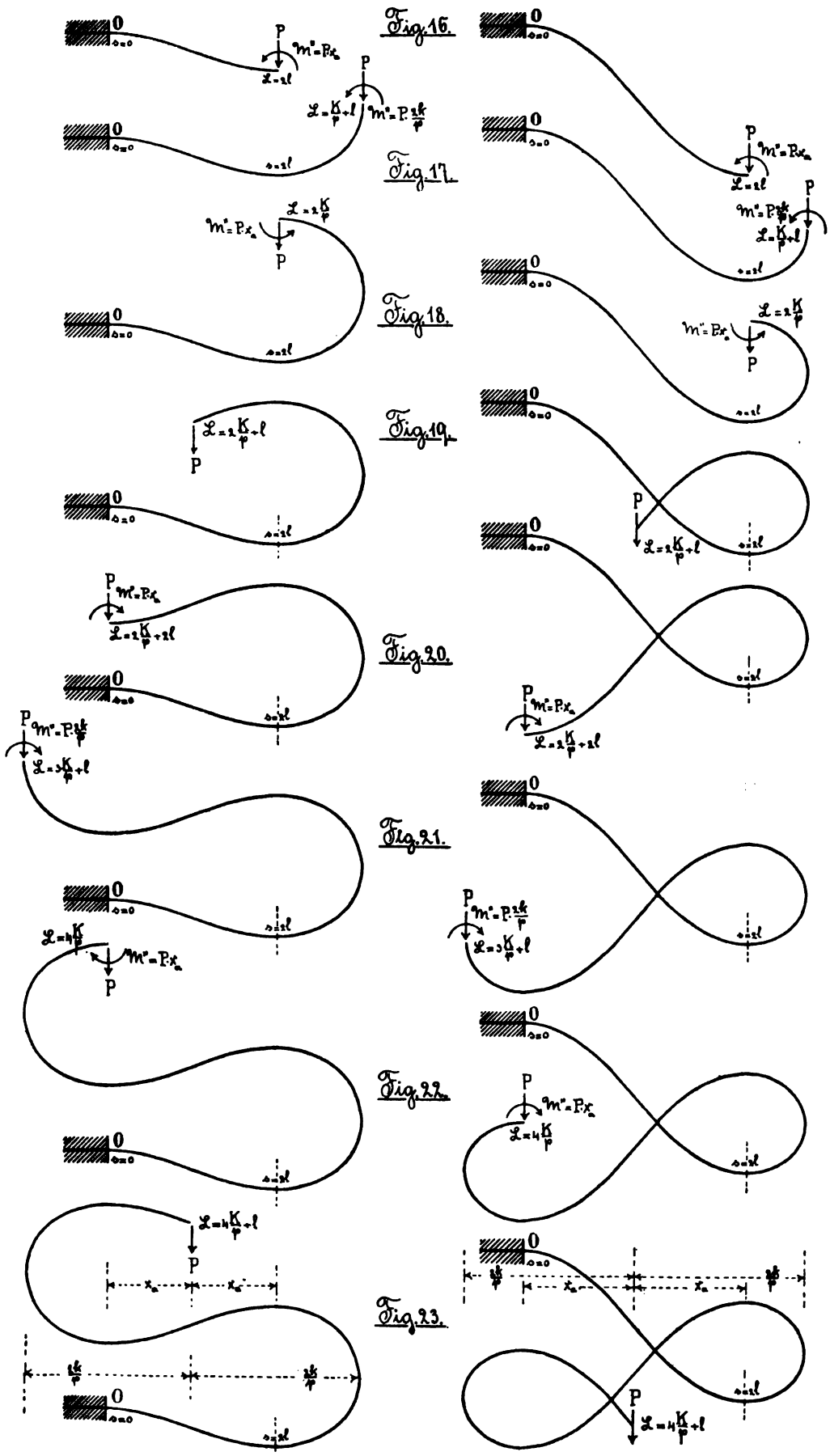


Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.

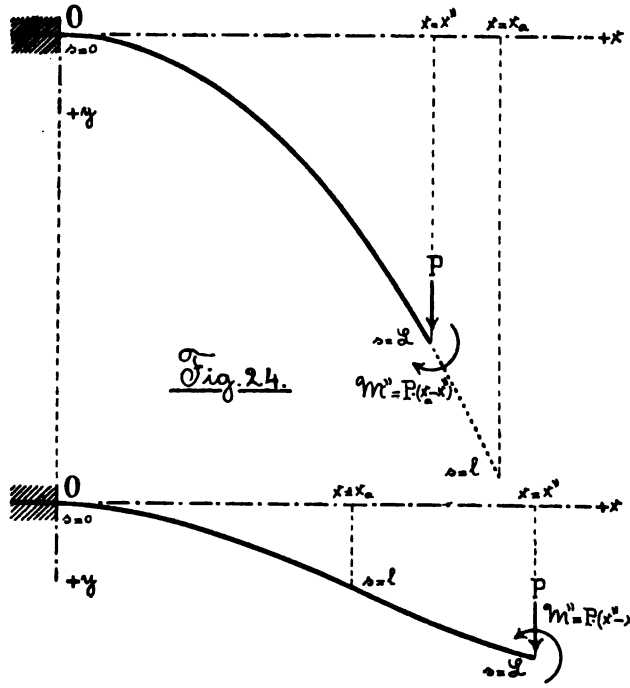


Fig. 24.

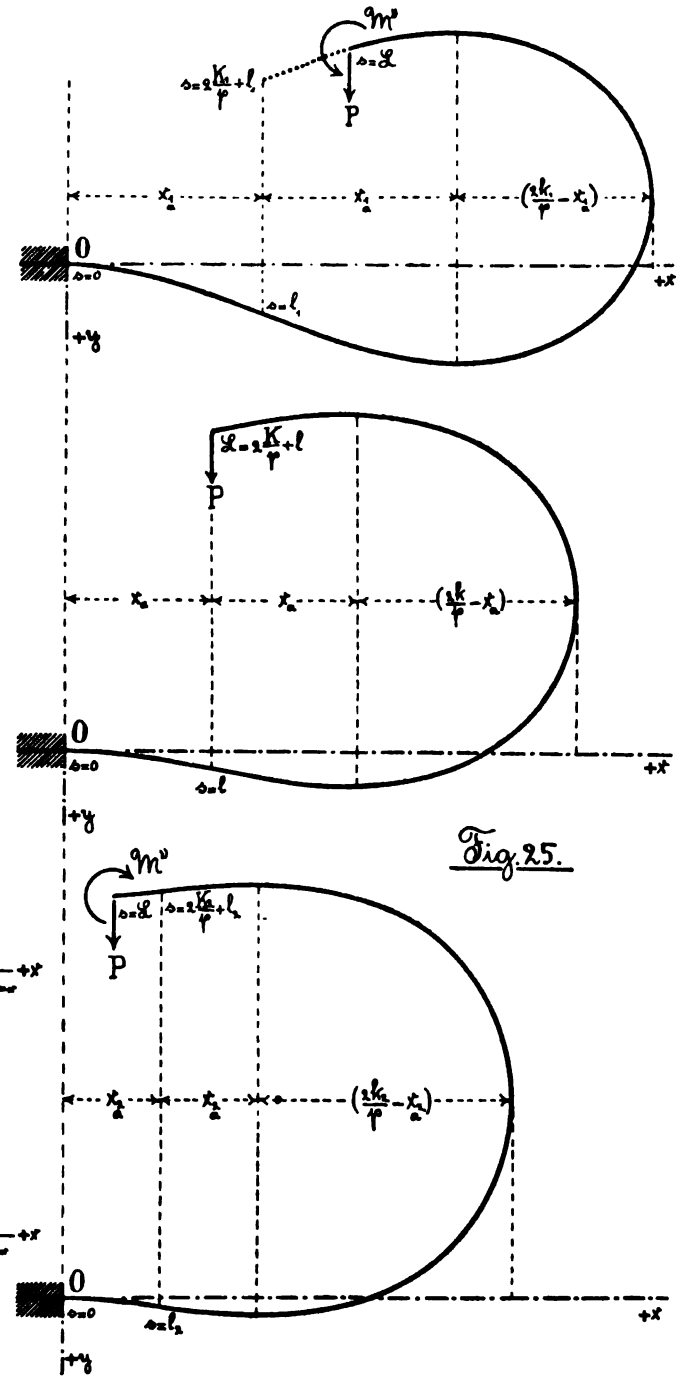


Fig. 25.

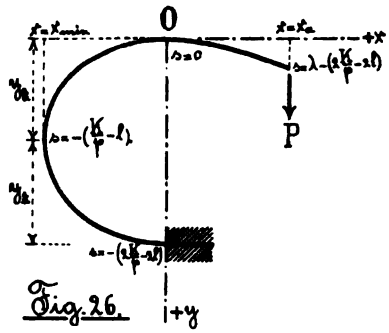


Fig. 26.

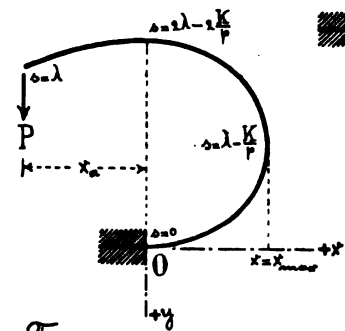
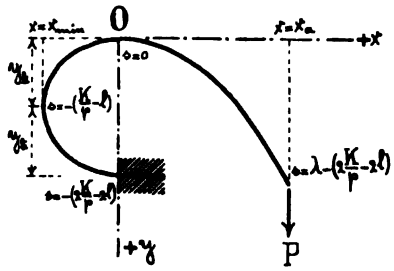
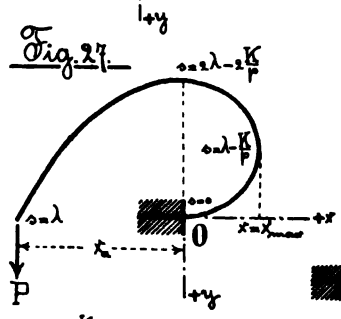
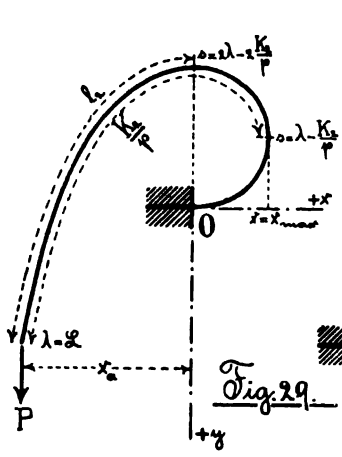


Fig. 27.







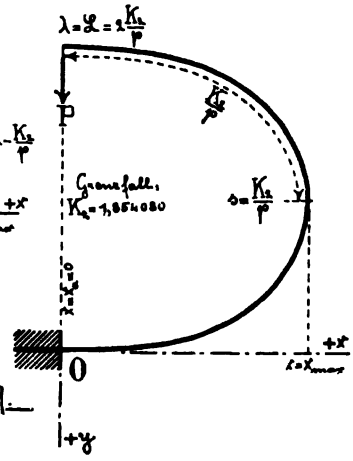


Fig. 29.

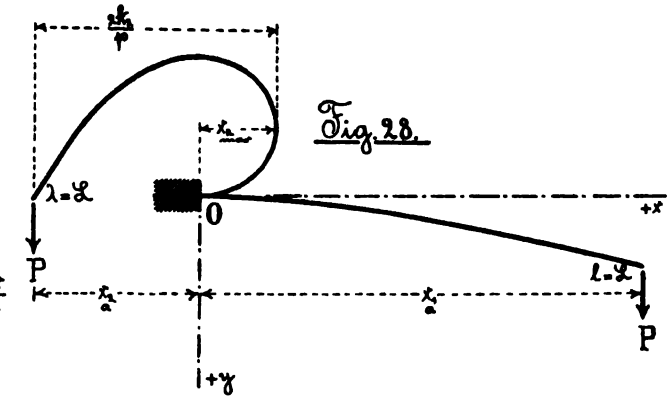
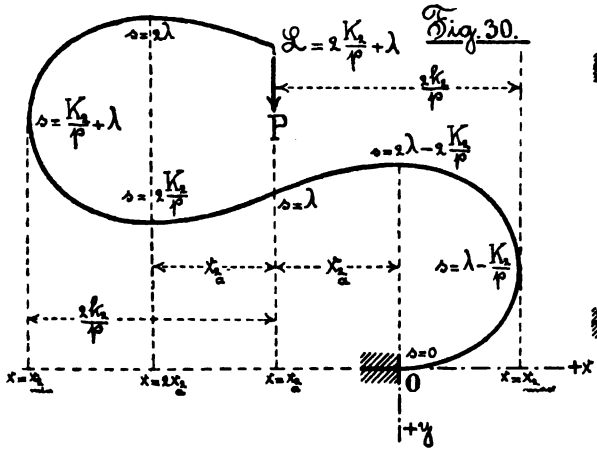


Fig. 28.



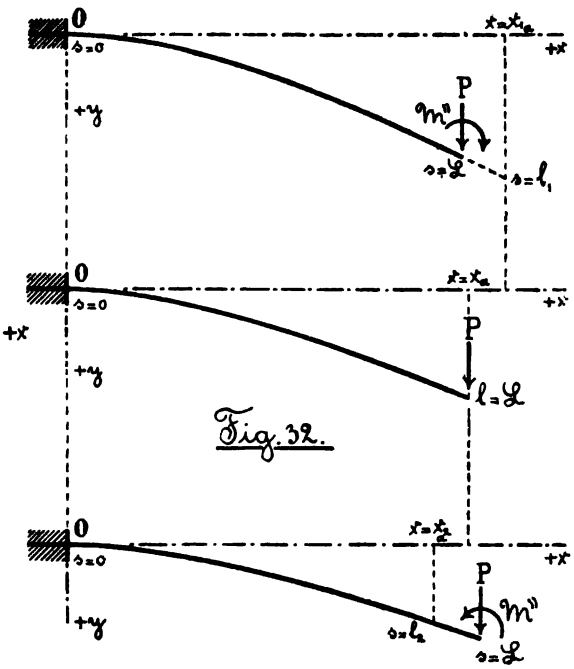
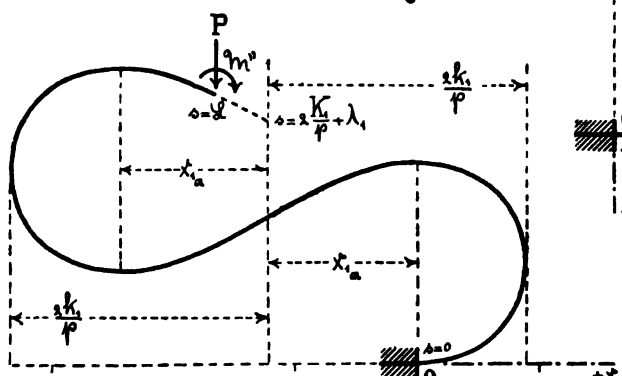


Fig. 32.



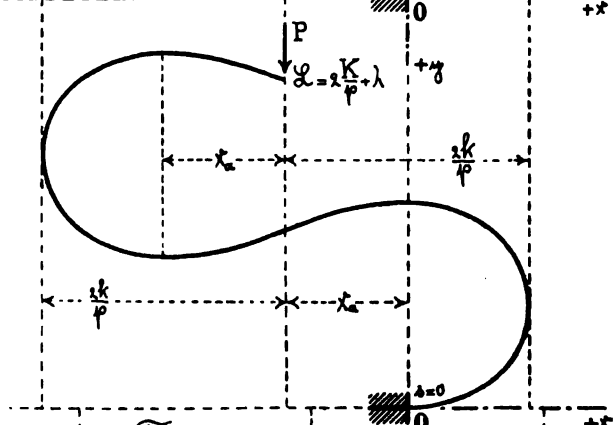
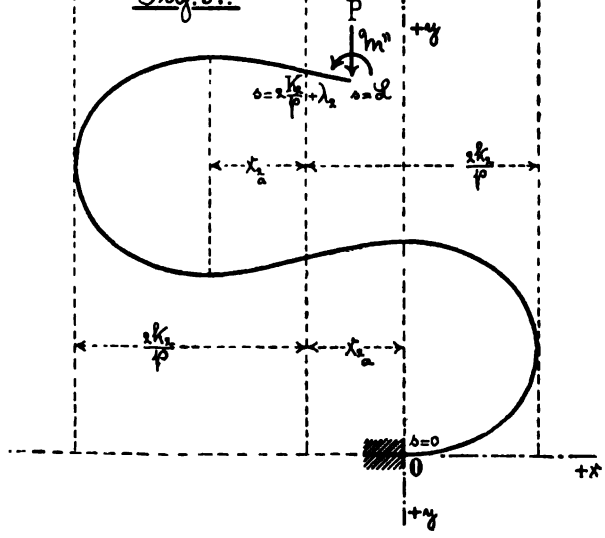


Fig. 31.



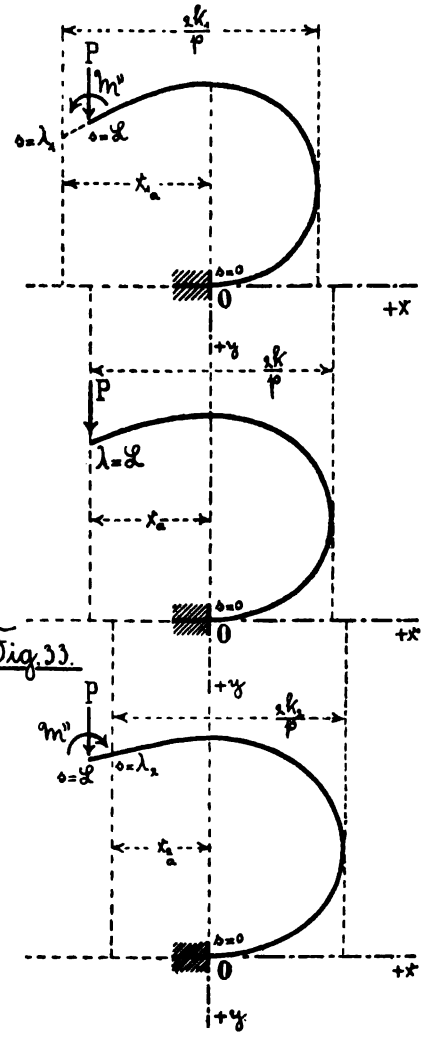


Fig. 33.

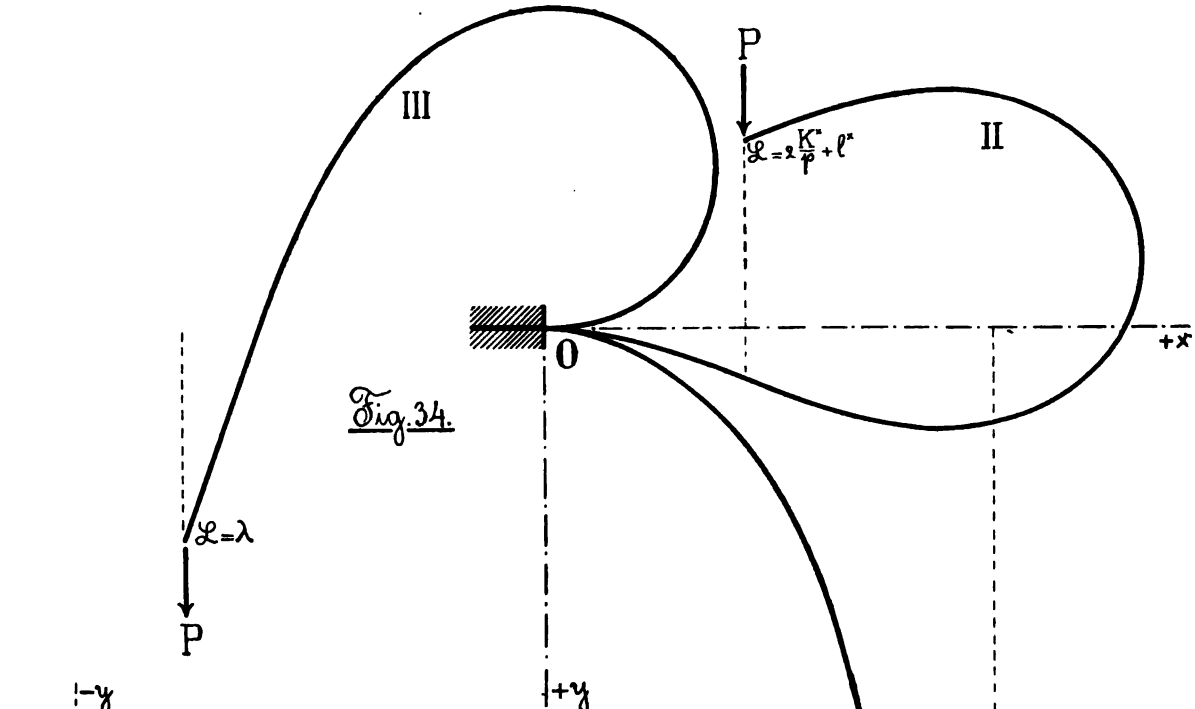


Fig. 34.

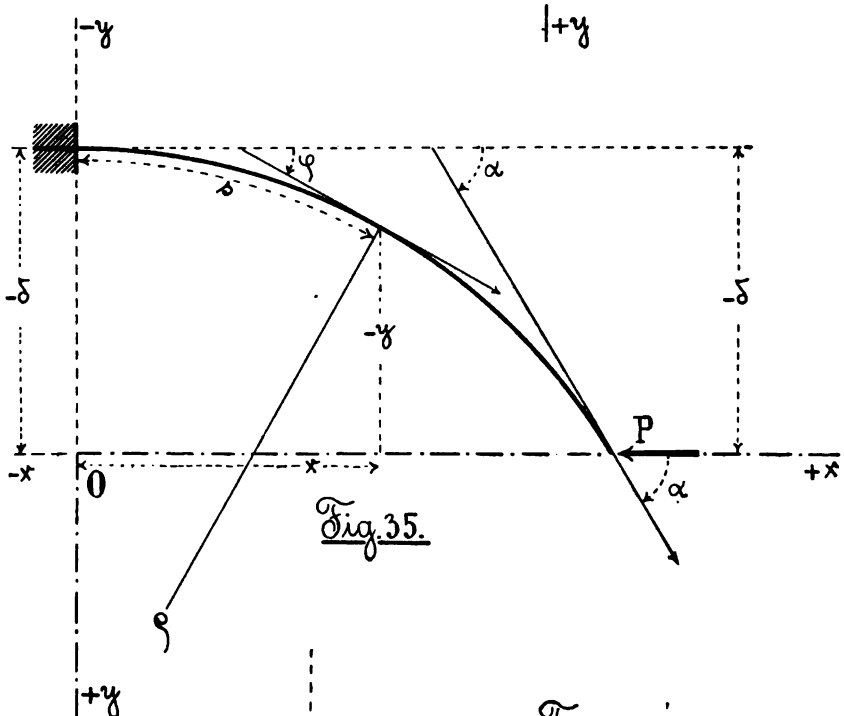


Fig. 35.

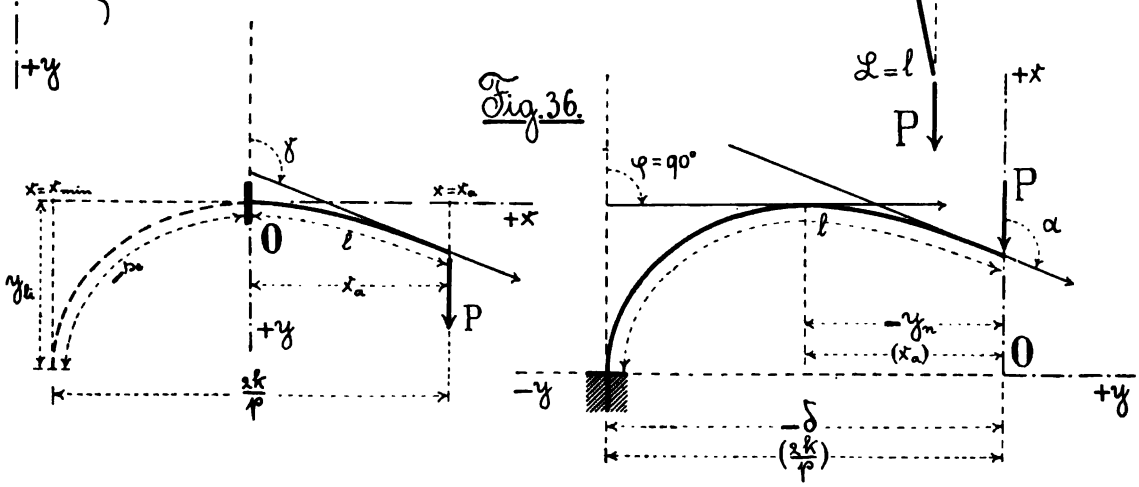


Fig. 36.

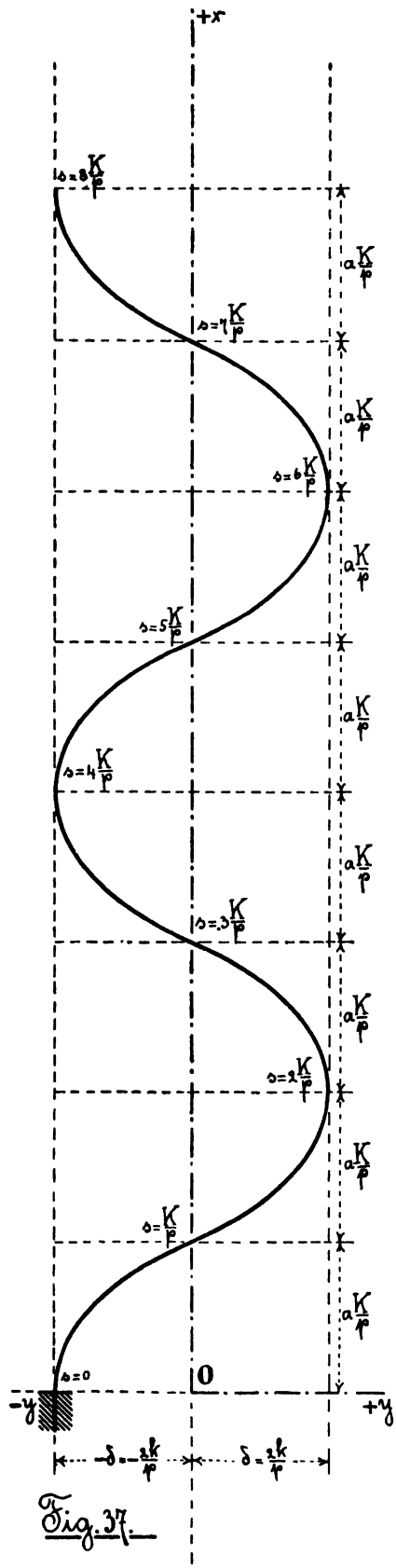


Fig. 37.

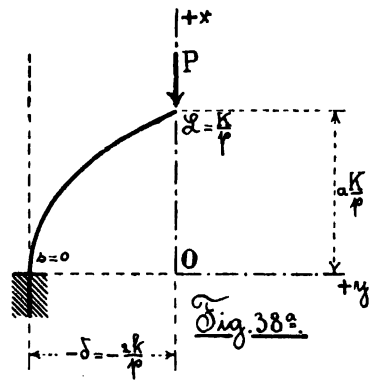


Fig. 38a.

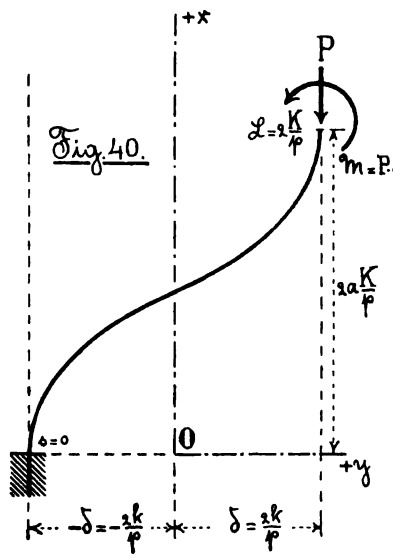


Fig. 40.

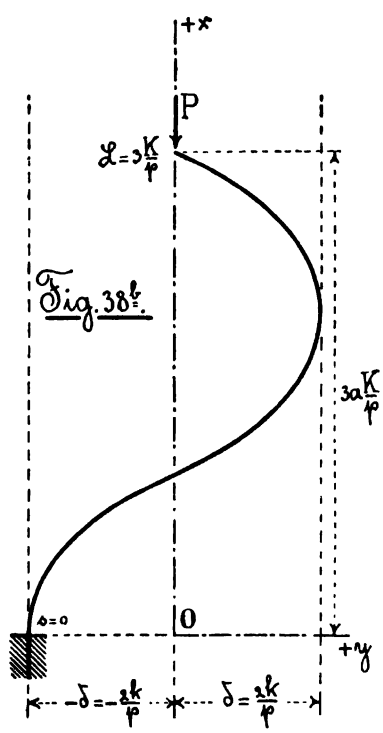


Fig. 38b.

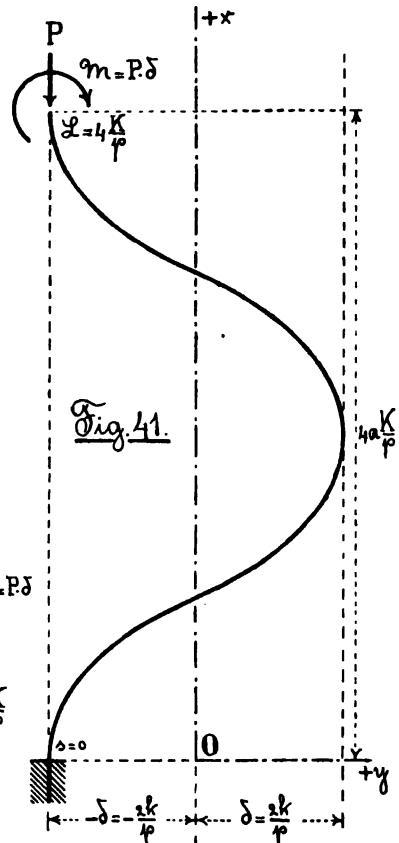


Fig. 41.

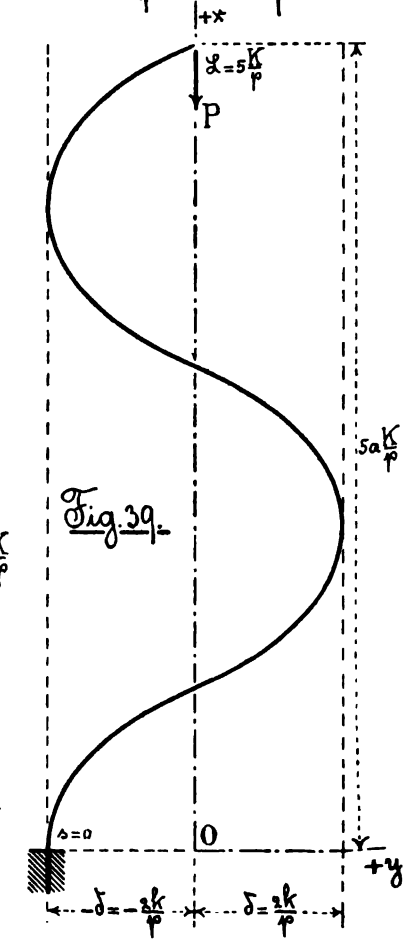


Fig. 39.

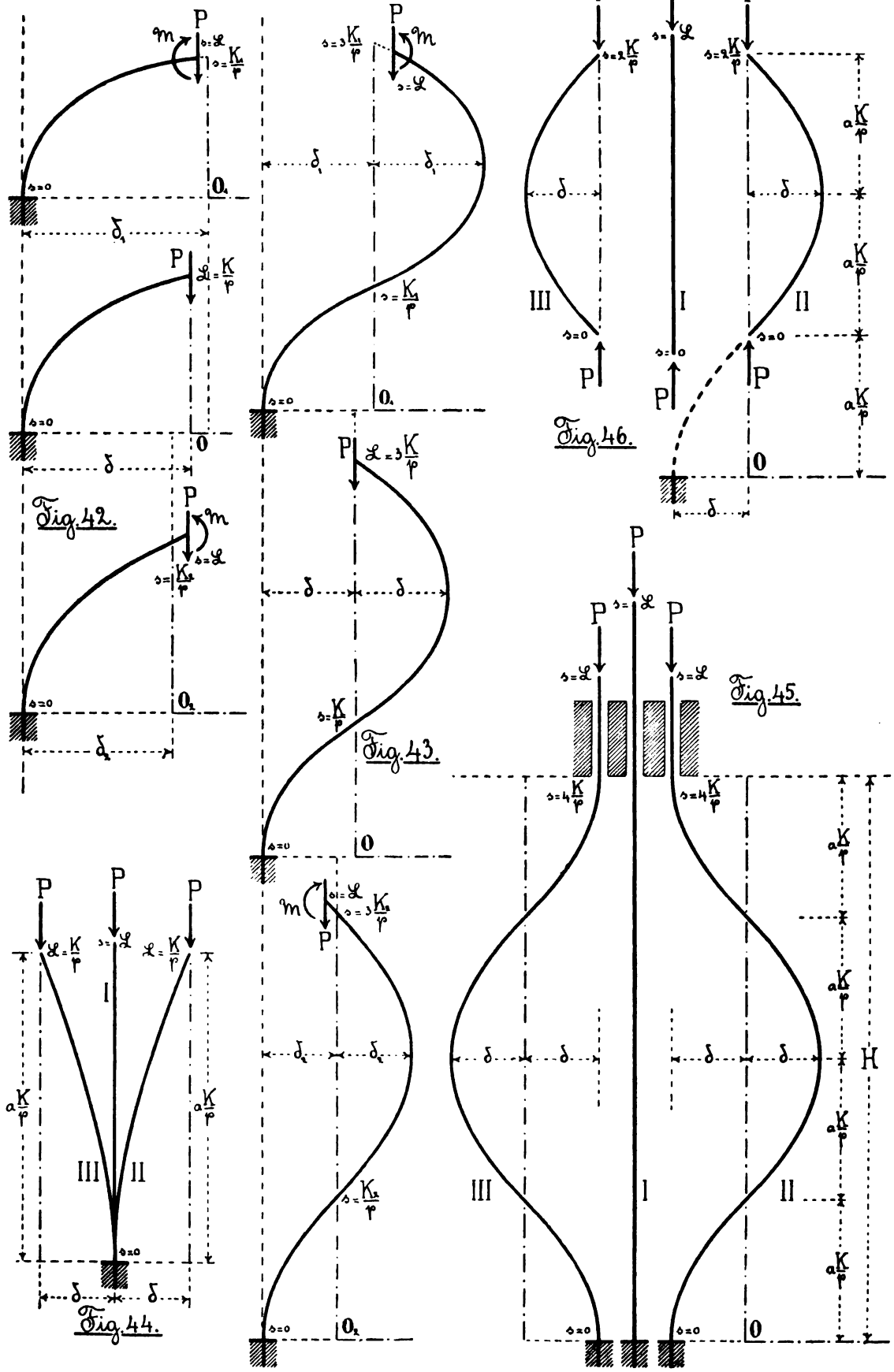


Fig. 42.

Fig. 43.

Fig. 44.

Fig. 45.

Fig. 46.

Fig. 47.

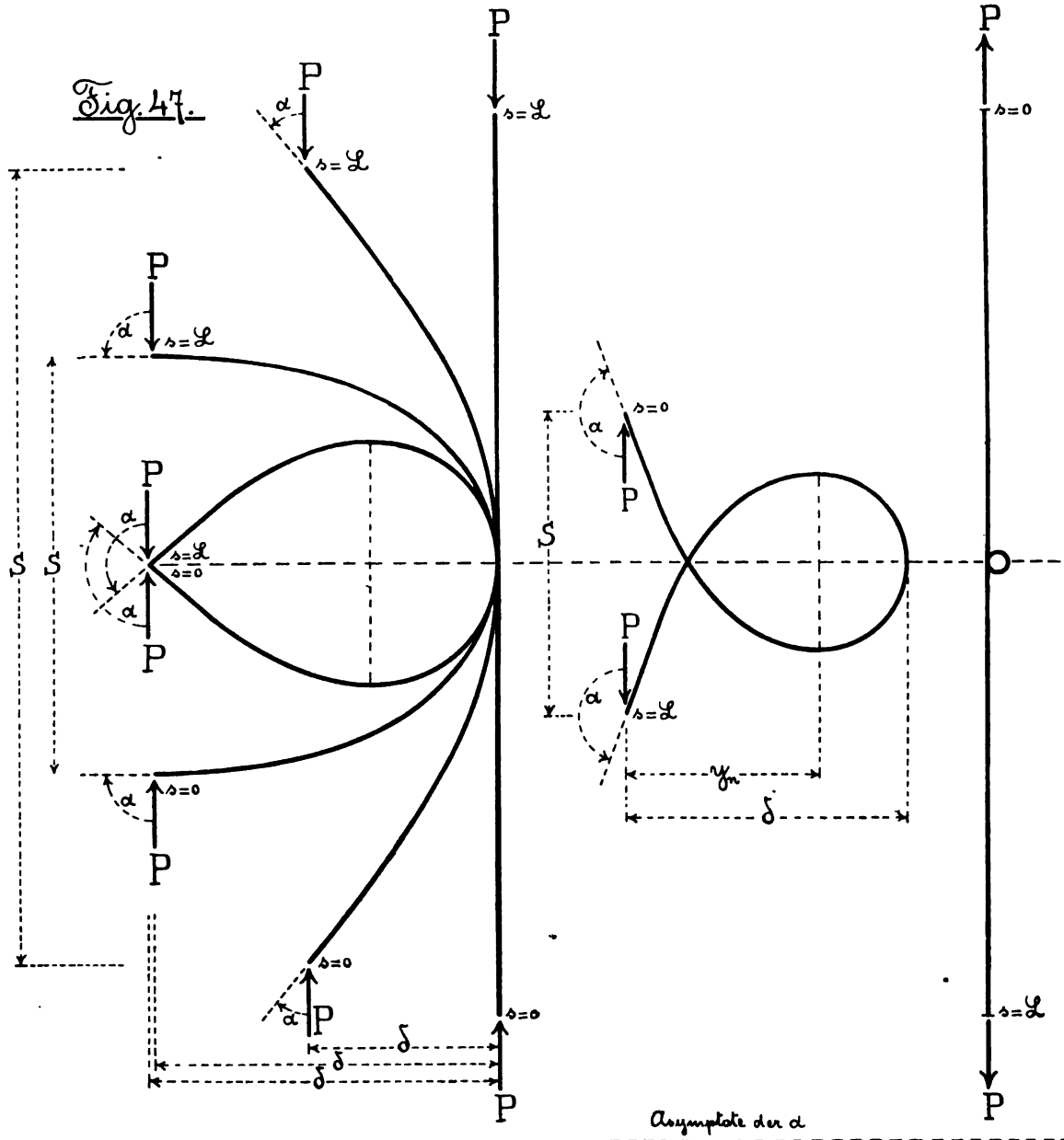


Fig. 47a.

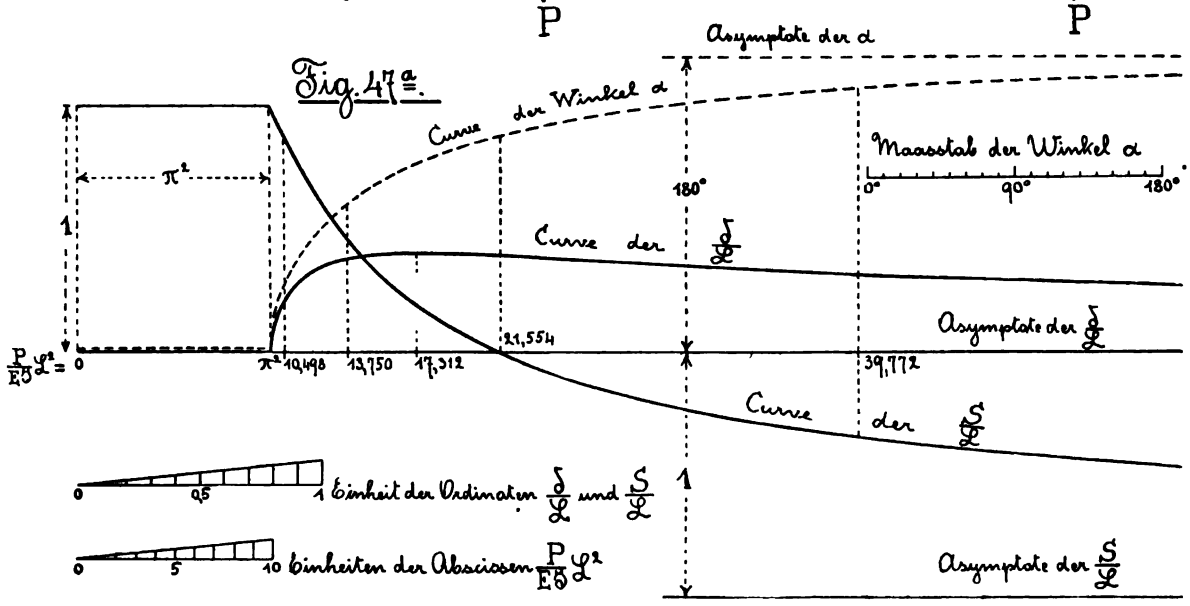
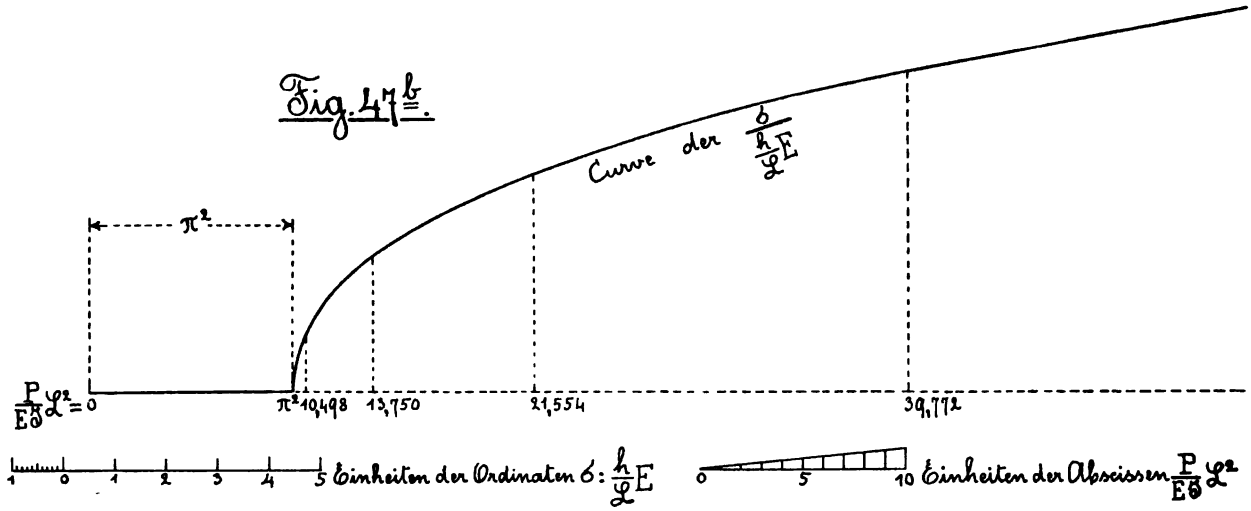


Fig. 47 b.



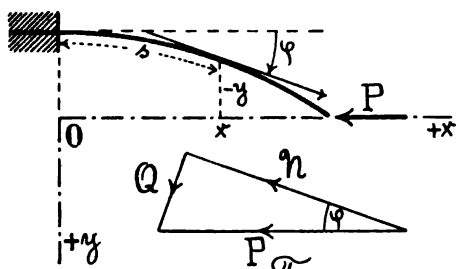


Fig. 48.

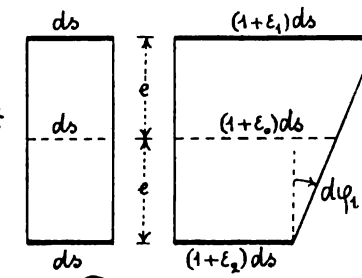
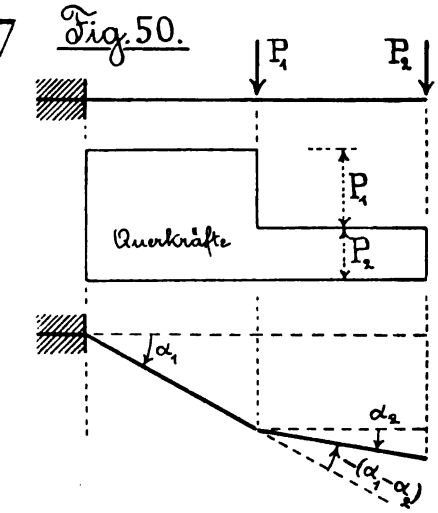


Fig. 49.

Fig. 50.



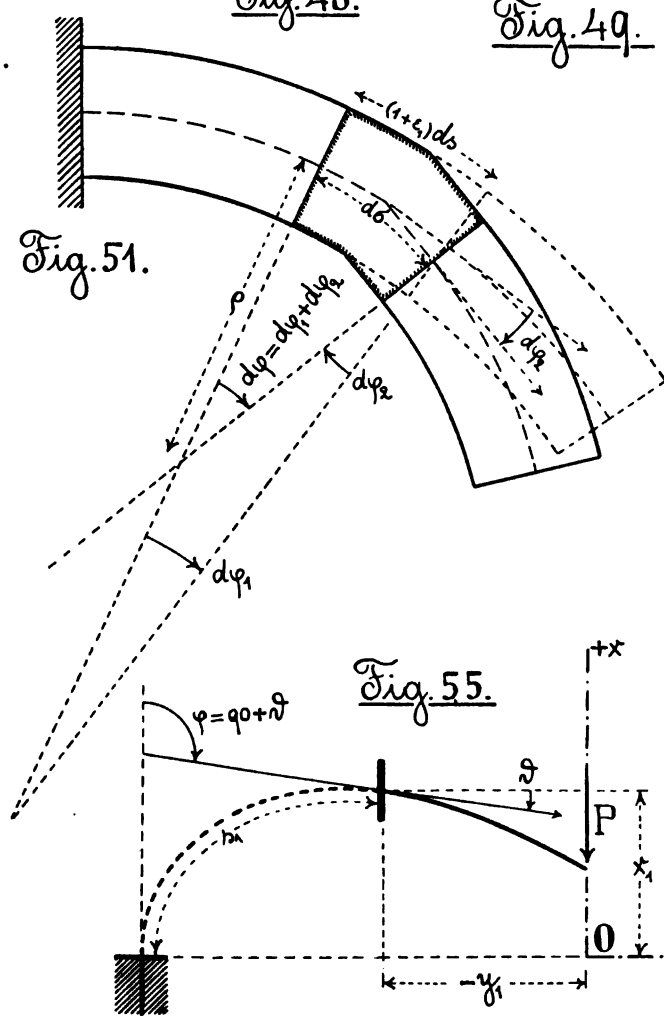


Fig. 51.

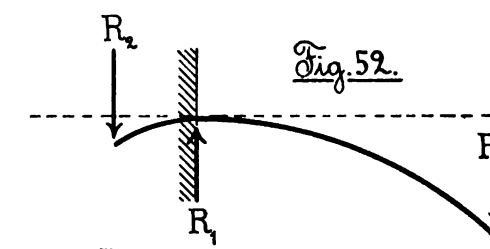


Fig. 52.

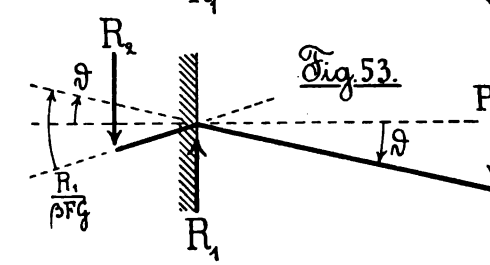


Fig. 53.

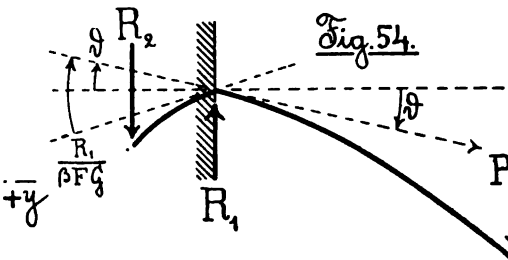


Fig. 54.

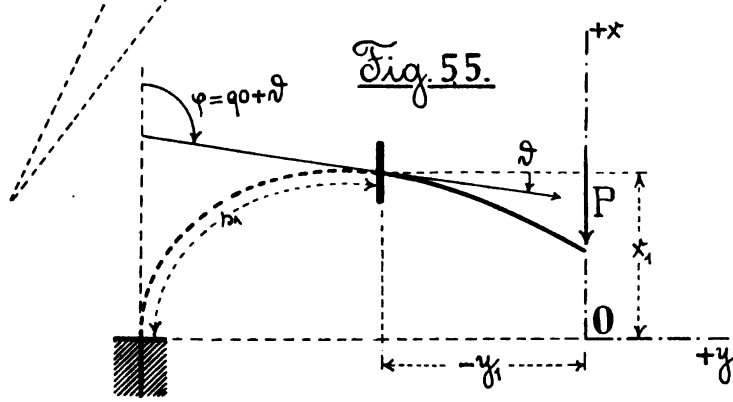


Fig. 55.

89080442429

b89080442429a